3 1761 05234745 7

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

Astron.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR

M. H. RESAL,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

DEUXIÈME ÉDITION.

87507
10/6/08

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1884

(Tous droits réservés.)

Digitized by the Internet Archive
in 2026 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/traitlmentairede00resa

AVANT-PROPOS.

Dans cette édition, comme dans celle qui l'a précédée, nous nous sommes proposé d'exposer les principes fondamentaux de la Mécanique céleste, en ayant recours à des démonstrations assez simples pour qu'elles puissent être adoptées dans l'enseignement des Facultés.

Pour déblayer le terrain et en même temps pour faciliter la lecture du texte proprement dit, nous avons cru devoir placer en tête de l'Ouvrage une Introduction où se trouvent traitées, d'une manière spéciale, la plupart des questions de Mécanique analytique et d'Analyse qui doivent ultérieurement se présenter, et parmi lesquelles nous signalerons les suivantes : dans le Titre I, nous avons donné les équations de la Mécanique analytique, dues à Lagrange, Hamilton et Jacobi, suivies de celles auxquelles conduit la méthode de la variation des constantes arbitraires. Le Titre II se rapporte à l'emploi des coordonnées elliptiques dans la solution de certains problèmes relatifs au mouvement d'un point matériel dans un plan.

Dans le Titre III, nous avons reproduit les intégrales connues des équations du mouvement relatif, par rapport à l'un de ses points, d'un système matériel uniquement soumis à ses actions mutuelles.

Nous avons eu pour objet, dans le Titre IV, d'établir les équations du mouvement dans l'espace d'un point matériel, exprimées en coordonnées polaires, équations auxquelles on doit avoir recours dans la théorie de la Lune. Le Titre V et dernier de l'Introduction renferme les solutions de quelques questions d'Analyse dont les énoncés ne peuvent

pas être traduits en langage ordinaire et pour lesquels nous renverrons à la Table des matières.

Nous arrivons maintenant à la partie essentielle de l'Ouvrage.

Dans le Chapitre I, nous nous sommes occupé du mouvement elliptique des planètes, de la gravitation, de la détermination des masses, de la formule de Lambert et de ses conséquences dans le mouvement parabolique des comètes; de la détermination des constantes introduites dans les formules du mouvement elliptique et notamment par la méthode de Gauss, qui n'est mentionnée ni dans la *Mécanique céleste* de Laplace, ni dans l'*Exposition analytique du système du monde* de Pontécoulant; des développements en séries des coordonnées d'une planète suivant les puissances ascendantes du temps et de leurs applications, ainsi que de la détermination des éléments d'une orbite cométaire. Comme première innovation apportée au programme de la première édition, nous avons terminé le Chapitre dont il s'agit en nous occupant du problème du mouvement plan d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance; ce problème, posé par Euler, a été complètement résolu par Legendre, puis par Liouville, dont nous avons reproduit la démonstration, en raison de sa simplicité.

Le Chapitre II est consacré entièrement à la théorie des perturbations. Nous avons pensé que, pour bien faire comprendre le sens du problème que l'on a en vue, il convenait de faire précéder les recherches analytiques de la théorie géométrique des perturbations, dont l'idée première est due à Newton et qui a été reprise plus tard par Lagrange, dans l'hypothèse où les planètes circuleraient dans le plan de l'écliptique. Dans cette seconde innovation, nous avons eu uniquement recours aux propriétés de l'accélération, qui, comme on le sait, n'ont été établies que vers le commencement de la seconde moitié de notre siècle. Nous avons déduit très facilement, des résultats obtenus, les formules de Poisson qui s'appliquent au mouvement d'une planète

dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Nous avons exposé ensuite la théorie analytique des perturbations des planètes, en prenant pour point de départ les théorèmes d'Hamilton et de Jacobi, méthode qui est beaucoup plus simple que celle de Lagrange, lorsqu'on s'est bien assimilé les matières contenues dans l'Introduction. Nous avons terminé le Chapitre en donnant les formules qui se rapportent aux perturbations du mouvement elliptique des comètes.

Dans le calcul de l'attraction des corps, qui fait l'objet du Chapitre III, nous avons reproduit, à quelques modifications près, les démonstrations géométriques que nous avions données dans la première édition, en vue d'apporter quelque clarté sur cette partie de la Mécanique céleste. Nous avons continué à démontrer *a priori*, au moyen d'une double intégration par parties, la convergence du développement du potentiel en fonctions sphériques dans les cas douteux auxquels Laplace ne s'est pas arrêté. Nous avons employé, pour déterminer la forme de ces fonctions, la méthode de Jacobi, à laquelle nous avons donné plus de développements, et qui est l'une des plus élégantes et des plus simples.

Parmi les questions traitées dans le Chapitre IV, relatif à la figure des planètes, nous citerons celle de l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi, la discussion des équations qui en résultent, établie d'abord par Meyer, puis modifiée et complétée par Liouville; les hypothèses de Legendre et de E. Roche sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre; le théorème de Liouville sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, théorème dont nous avons donné une démonstration géométrique et que nous avons ensuite appliqué à la stabilité de l'équilibre des mers.

Nous avons déduit (Chap. V), de considérations géométriques sur le mouvement d'un point, les propriétés, dues à Laplace, des lignes géodésiques tracées sur la surface d'un sphéroïde.

Dans le Chapitre VI, où nous nous occupons des atmosphères des corps célestes, nous avons notamment emprunté à E. Roche les considérations qui, en tenant compte de l'hypothèse de la force répulsive due aux radiations calorifiques, imaginée par M. Faye, permettent d'expliquer la forme des comètes.

En tête du Chapitre VII, intitulé *Des oscillations de la mer et de l'atmosphère*, nous avons établi immédiatement les équations des petits mouvements d'un fluide recouvrant un noyau sphéroïdal, en nous appuyant uniquement sur le théorème de Coriolis dans le mouvement relatif, et sur le principe de l'indépendance des forces centrifuges composées avec les mouvements composants. Nous sommes parvenu à établir la formule pratique relative aux marées, donnée par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, formule qui paraît être due à Poisson, mais dont nous n'avons trouvé nulle part la démonstration.

Une interprétation géométrique des propriétés du mouvement d'un solide autour d'un point fixe nous a permis de poser presque immédiatement les équations du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité (Chap. VIII). En ce qui concerne les déplacements séculaires de la Terre, nous avions, dans la première édition, pris pour origine du temps l'année 1750; mais ici nous partons de l'année 1850, et nous mettons à profit les chiffres obtenus par Le Verrier en discutant les résultats des observations de Peters. Une simple considération géométrique basée sur la théorie des mouvements relatifs nous a permis d'établir facilement ce théorème de Laplace : *Les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation sont absolument les mêmes que si la mer et l'atmosphère formaient une masse solide avec le sphéroïde qu'elles recouvrent.*

Les équations du mouvement de la Lune et de l'anneau de Saturne, comme celles qui se rapportent à la Terre, ont aussi été déduites de considérations géométriques.

La publication de notre Ouvrage sur la *Physique mathématique* nous

a dispensé de reproduire, dans le Chapitre IX, relatif à la chaleur terrestre, les développements sur le mouvement de la chaleur dans une sphère et sur la chaleur centrale du globe, que nous avions donnés dans la première édition; nous n'avons eu dès lors, à quelques préliminaires près, à nous occuper que de la diminution de la durée du jour due au refroidissement de la Terre.

Nous avons ajouté au programme que nous avions adopté dans la première édition, et d'après Laplace dont nous nous sommes efforcé de simplifier les démonstrations :

1° La théorie des réfractions astronomiques;

2° La théorie des inégalités du mouvement des planètes dues à l'ellipticité du Soleil, avec son application à Mercure;

3° Enfin, pour terminer, les principes fondamentaux de la théorie de la Lune, en suivant la voie tracée par Laplace.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

AVANT-PROPOS. v

INTRODUCTION.

I.

Équations générales de la Mécanique analytique.

N^os^

1. Systèmes à liaisons 1
2. Équations du mouvement dans un système de coordonnées quelconques. — Formules de Lagrange 3
3. Équations d'Hamilton 5
4. De la fonction principale 7
5. Équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction principale 8
6. Théorème de Jacobi 9
7. De la fonction caractéristique 12
8. Forme des intégrales premières 13
9. Méthode d'intégration de Jacobi 13
10. Méthode de la variation des constantes arbitraires. — Formule de Lagrange 16

II.

De l'emploi des coordonnées elliptiques dans la solution de certains problèmes relatifs au mouvement d'un point dans un plan.

11. Equations générales 19

III.

Sur le mouvement relatif d'un système matériel libre, uniquement soumis à ses actions mutuelles par rapport à un point déterminé de ce système.

12. Équations de translation 23
13. Équations des moments 24
14. Équation des forces vives 25

IV.

Équations du mouvement, dans l'espace, d'un point matériel, exprimées en coordonnées polaires.

15. Établissement des équations 27

V.

Sur quelques questions d'Analyse.

N^os^ Pages

16. Développements de Lagrange 32

17, 18, 19, 20. Sur le développement en série trigonométrique de la fonction

$$(a'^2 - 2aa'\cos\theta + a^2)^{-\nu} \ldots\ldots 34$$

21. Sur deux cas particuliers dans lesquels on peut donner une forme trigonométrique à l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{my}{x^2} + q^2y = 0. \ldots\ldots 39$$

22. Solution trigonométrique de l'équation

$$\text{tang}\, y = m\,\text{tang}\, x \ldots\ldots 41$$

23. Sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = X \ldots\ldots 42$$

CHAPITRE I.

PREMIÈRE APPROXIMATION DU MOUVEMENT DES PLANÈTES.

§ I. — *Du mouvement elliptique des planètes.*

1, 2. Lois de Kepler. — Accélération du centre des planètes 45
3. Principe de la gravitation universelle 49
4. De la pesanteur terrestre 53
5. Des satellites 54
6. Généralités sur les masses des planètes. — Masse de Jupiter 55
7. Masse de la Terre 55
8. Masse de la Lune 57
9. Masse des planètes dépourvues de satellites 58
10. Des comètes 58
11. Relation entre le temps écoulé entre deux observations d'une comète et des quantités connues 60
12. Du mouvement relatif, par rapport à leur centre de gravité, de deux points matériels qui s'attirent mutuellement suivant les lois de la gravitation 62
13. Problème de Kepler 63
14. Cas où l'on peut négliger les puissances de l'excentricité d'un ordre supérieur au premier 64
15. Développements des coordonnées polaires du mouvement elliptique en fonction du temps 65
16. Orbite rapportée à un plan fixe autre que le sien 69
17. Expression indépendante de l'excentricité du temps qui sépare deux positions d'une planète. 71

§ II. — *Détermination des constantes introduites dans les formules du mouvement elliptique.*

18. Généralités 73
19. Méthode de Gauss 75
20. Détermination des éléments d'une orbite lorsqu'on se donne les rayons vecteurs de trois positions de la planète 78

N^os^ Pages

21. Développements en séries des coordonnées d'une planète suivant les puissances ascendantes du temps 79
22. Application au cas où l'on connaît deux positions de la planète séparées par un intervalle de temps suffisamment court 80
23. Cas où l'on connaît trois positions de la planète 81

§ III. — *Détermination des éléments d'une orbite cométaire.*

24. Généralités 82
25. Établissement des équations 82

§ IV. — *Du mouvement dans un plan d'un point attiré ou repoussé par deux centres fixes suivant la raison inverse du carré de la distance.*

26, 27 87

CHAPITRE II.

DES PERTURBATIONS DES PLANÈTES.

§ I. — *Considérations générales.*

28. Énoncé du problème que l'on se propose de résoudre 91
29. Perturbation du mouvement elliptique dans l'hypothèse où la force perturbatrice est comprise dans le plan passant par le Soleil et la vitesse de la planète à un instant quelconque 92
30. Application au mouvement d'une planète dans un milieu résistant 97

§ II. — *Expressions générales des variations des éléments du mouvement elliptique.*

31. Généralités 101
32. Application des théorèmes d'Hamilton et de Jacobi au mouvement des planètes autour du Soleil 101
33. Théorie des perturbations 107
34. Variations de la longitude moyenne et du mouvement moyen 111
35. Expressions de $d\varphi$ et $d\alpha$ lorsque l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe est très petite 112
36. Expressions des variations de α, φ, ε lorsque l'excentricité de l'orbite est très petite 115

§ III. — *Développement en série trigonométrique de la fonction perturbatrice.*

37. Expression de la fonction perturbatrice 117
38, 39, 40. Développement de la fonction perturbatrice dans l'hypothèse d'orbites peu inclinées et d'une faible excentricité 118

§ IV. — *Des inégalités séculaires.*

41. Généralités 129
42. De la moyenne distance de la planète troublée 130
43. Théorèmes généraux relatifs aux inégalités séculaires 131
44. Considérations générales sur la stabilité du système solaire 136
45. Calcul des inégalités séculaires des excentricités et des longitudes des périhélies 139

N^os^ Pages
46. Calcul des inégalités séculaires des inclinaisons et des longitudes des nœuds..... 143
47. Calcul des inégalités séculaires de la longitude de l'époque..... 146

§ V. — *Des perturbations du mouvement elliptique des comètes.*

48. Généralités..... 151
49. Variation des éléments du mouvement elliptique des comètes..... 151
50. Calcul de la variation éprouvée par la durée de la révolution d'une comète..... 158
51, 52. Développement en séries des perturbations d'une comète lorsqu'elle s'éloigne beaucoup du périhélie..... 159

CHAPITRE III.

CALCUL DE L'ATTRACTION DES CORPS.

§ I. — *Généralités sur l'attraction des systèmes matériels.*

53. Objet que l'on a en vue..... 171
54. Expressions des composantes parallèles à trois axes rectangulaires de l'attraction d'un système matériel sur un point matériel..... 171
55. Attraction d'un système matériel sur un point matériel qui en est très éloigné par rapport aux dimensions du système..... 173

§ II. — *Attraction des corps terminés par des surfaces sphériques.*

56. Considérations générales sur la constitution des corps célestes..... 178
57. Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur..... 178
58. Attraction d'une sphère sur un point extérieur, de deux sphères..... 179
59. Attraction d'une couche homogène limitée par deux des surfaces ellipsoïdales homothétiques. 180
60. Application à la pesanteur..... 181
61. Remarque relative aux attractions mutuelles des corps célestes..... 182
62. Recherche des lois de l'attraction suivant lesquelles les sphères s'attirent comme si elles étaient concentrées en leurs centres respectifs..... 182

§ III. — *Attraction des ellipsoïdes homogènes.*

63. Exposé de la question..... 184
64. Digression sur quelques propriétés des ellipsoïdes homofocaux..... 185
65. Le problème de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur se ramène au cas où le point est situé sur la surface extérieure d'une couche ellipsoïdale infiniment mince..... 187
66. Attraction d'une couche infiniment mince de forme quelconque sur un point de la surface... 188
67. Cas où la couche est ellipsoïdale..... 195
68. Composantes de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur..... 195
69. Attraction sur un point de sa surface d'un ellipsoïde de révolution assez peu aplati pour qu'on puisse négliger la quatrième puissance de son aplatissement..... 199
70. Attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur..... 201
71. Attraction, sur un point extérieur, d'un cylindre indéfini homogène dont la section est une ellipse..... 201

§ IV. — *Attraction des sphéroïdes.*

72. Équation aux différentielles partielles à laquelle satisfait le potentiel..... 202
73. Développement en série de l'attraction d'un sphéroïde sur un point..... 206

Nos Pages

74, 75. Attraction d'une couche infiniment mince terminée par deux surfaces sensiblement sphériques sur un point extérieur 208

76. Attraction d'une couche homogène très mince peu différente de la forme sphérique sur un point de sa surface intérieure 211

77. Attraction d'un sphéroïde homogène peu différent d'une sphère sur un point de sa surface.. 211

78, 79, 80. Propriétés caractéristiques des fonctions Y_ν 215

81. Des fonctions X_ν 217

82. Simplifications que l'on peut apporter dans le développement en série de l'attraction d'un sphéroïde peu différent d'une sphère sur un point extérieur 218

83. Réduction des formules relatives à l'attraction sur un point d'un sphéroïde homogène peu différent d'une sphère 219

84. Attraction, sur un point intérieur, d'une couche homogène peu différente de la forme sphérique, quelle que soit son épaisseur 222

85. Attraction, sur un point, d'un sphéroïde formé de couches homogènes peu différentes de la forme sphérique, mais dans lequel la densité varie d'une couche à l'autre 223

84*. Détermination de la forme générale des fonctions P_ν et X_ν 225

85*. Forme générale des fonctions sphériques 231

86. Détermination de l'intégrale $\int_0^{2\pi} d\varpi \int_{-1}^{+1} Y_\nu Z_\nu \, d\mu$ 232

87. Relation entre les moments d'inertie principaux qui se rapportent au centre de gravité d'un sphéroïde formé de couches homogènes peu différentes d'une sphère, mais dans lequel la densité peut varier d'une couche à l'autre 234

CHAPITRE IV.

DE LA FIGURE DES CORPS CÉLESTES.

§ I. — *Généralités.*

88. Exposé et données de la question 239

§ II. — *De la figure d'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation.*

89. Équation différentielle des couches de niveau 240

90. Forme ellipsoïdale à trois axes inégaux 241

91. Conditions qui doivent être remplies pour que la forme ellipsoïdale de révolution soit possible 244

92. Cas d'un mouvement très lent 247

93. Remarque 248

94. Pour un mouvement de rotation donné, il y a toujours une figure elliptique de révolution, et il n'y en a qu'une seule 249

95. Expression de l'accélération de la pesanteur à la surface de l'ellipsoïde 250

96. Discussion relative à la possibilité de l'ellipsoïde à trois axes inégaux comme forme d'équilibre 251

§ III. — *De la figure d'équilibre d'une masse fluide peu différente d'une sphère pouvant recouvrir un sphéroïde.*

97. Considérations générales 259

98. Figure d'équilibre d'une masse fluide homogène peu différente d'une sphère, animée d'un mouvement uniforme de rotation 259

Nos Pages

99. Si une masse fluide homogène, animée d'un mouvement de rotation uniforme, est sollicitée par des forces extérieures très petites indépendantes de sa forme d'équilibre; si, de plus, cette forme est peu différente d'une sphère, elle est unique 261
100. Surface d'équilibre d'une couche fluide homogène peu différente d'une sphère recouvrant un noyau sphérique homogène 262
101. Formules générales relatives à l'équilibre d'une masse fluide hétérogène à peu près sphérique pouvant recouvrir un noyau sphérique 263
102. Figure d'équilibre d'une masse fluide hétérogène dont les couches de niveau sont peu différentes de la sphère 267
103. De la pesanteur 273
104. Attraction sur un point extérieur qui est ou a été liquide et qui peut être recouvert d'une masse fluide 278
105. Hypothèses sur la loi de la variation de la densité de la Terre avec la profondeur 279
106. Hypothèse de Legendre 279
107. Hypothèse de E. Roche 284

§ IV. — *De la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation uniforme.*

108. Condition qui doit être remplie pour que l'équilibre soit stable 287
109. De la stabilité de l'équilibre des mers 288

§ V. — *De la figure de l'anneau de Saturne.*

110. Considérations générales 290
111. La figure elliptique satisfait à la condition d'équilibre d'un anneau supposé fluide 291
112. Instabilité d'un anneau régulier et irrégularité nécessaire pour la stabilité de l'équilibre ... 293

CHAPITRE V.

DE LA FORME DE LA TERRE DÉDUITE DES MESURES GÉODÉSIQUES.

113. Rappel des propriétés des lignes géodésiques 295
114. Lignes géodésiques d'un sphéroïde très peu différent d'une sphère 296
115. Application à la Géodésie 303

CHAPITRE VI.

DE LA FIGURE DES MASSES GAZEUSES QUI ENVIRONNENT LES CORPS CÉLESTES.

§ I. — *Des atmosphères des corps célestes.*

116. Généralités 311
117. Équation générale des surfaces de niveau 312
118. De la surface limite d'une atmosphère 314
119. Discussion des surfaces de niveau intérieures à la surface limite 315
120. Discussion de la surface libre d'une atmosphère 318
121. Des surfaces de niveau extérieures à la surface libre 321
122. De l'atmosphère solaire 322
123. De l'atmosphère lunaire 324

N^os^ Page
124. Cas où l'atmosphère n'est pas animée d'un mouvement de rotation..... 326
125. Application aux phénomènes cométaires..... 327

§ II. — *Des atmosphères planétaires dans l'hypothèse d'une force répulsive.*

126. Exposé..... 328
127. Équations des surfaces de niveau et de la surface limite..... 329
128. Discussion du méridien limite..... 329
129. Discussion des lignes de niveau..... 331

CHAPITRE VII.

DES OSCILLATIONS DE LA MER ET DE L'ATMOSPHÈRE.

§ I. — *Équations générales des petites oscillations de la mer.*

130. Généralités..... 335
131. Des petits mouvements d'un fluide recouvrant un noyau sphéroïdal..... 336
132. Équations des petites oscillations de la mer..... 339
133. Calcul de l'attraction du Soleil et de la Lune..... 341
134. Classification des oscillations en trois espèces..... 343
135. Loi des oscillations de la mer dans l'hypothèse d'une profondeur uniquement fonction de la latitude..... 344
136. Examen du cas où, la profondeur de la mer étant supposée constante, on ferait abstraction de la rotation de la Terre..... 345

§ II. — *Des oscillations de la mer dans l'hypothèse où elle recouvrirait complètement un ellipsoïde de révolution peu différent d'une sphère.*

137. Expression de la profondeur..... 346
138. Des oscillations de la première espèce..... 346
139. Des oscillations de la seconde espèce..... 348
140. De la différence entre deux marées d'un même jour..... 350
141. Des oscillations de la troisième espèce..... 351
142. Loi des oscillations de la troisième espèce dans l'hypothèse d'une profondeur constante..... 353
143. Forme d'équilibre que prendrait la mer sous l'action du Soleil et de la Lune..... 358

§ III. — *Lois générales des marées.*

144. Formules générales..... 359
145. Loi des profondeurs pour laquelle les oscillations de la deuxième espèce sont nulles pour toute la Terre..... 360
146. Loi des profondeurs pour laquelle les oscillations de la troisième espèce sont nulles pour toute la Terre..... 361
147. Expression de la surélévation de la mer dans chaque port..... 362
148. Prédiction des heures des marées..... 364
149. Hauteur des marées..... 367

§ IV. — *Des oscillations de l'atmosphère.*

150. Loi des pressions dans l'atmosphère supposée en équilibre..... 368
151. Loi des petites oscillations de l'atmosphère..... 371

N^os^ Pages

152. Variation de la hauteur barométrique 372
153. Hypothèse d'une mer d'une profondeur constante 373
154. Applications 374
155. Vent produit par le Soleil et la Lune 375
156. Résultats de l'observation 376

CHAPITRE VIII.

MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES AUTOUR DE LEUR CENTRE DE GRAVITÉ.

§ I. — *Rappel des équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.*

157 377

§ II. — *Du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.*

158. Exposé de la question 379
159. Du mouvement initial de la Terre autour de son centre de gravité 379
160. Du mouvement de la Terre, en ayant égard à l'attraction du Soleil et de la Lune 381
161. De l'action du Soleil 384
162. De l'action de la Lune 387
163. Effet total des actions simultanées du Soleil et de la Lune 389
164. Nutation 389
165. Déplacements séculaires de la Terre rapportés à l'écliptique vraie 390
166. Formules numériques 392
167. Invariabilité de la durée de la rotation de la Terre 393
168. Précession annuelle et valeur de l'année équinoxiale 394
169. Rapport des moments principaux d'inertie de la Terre 394
170. Variations séculaires du jour solaire 395
171. De l'influence des oscillations de la mer sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité 398

§ II. — *Du mouvement de la Lune autour de son centre de gravité.*

172. Généralités 401
173. Formules relatives à la libration de la Lune 402
174. Du mouvement de l'équateur et de la variation de son inclinaison 406

§ III. — *Du mouvement des anneaux de Saturne autour de leur centre de gravité.*

175. Équations générales 410
176. Calcul des moments. — Résultat final 416

CHAPITRE IX.

DE LA CHALEUR TERRESTRE.

177. Rappel de quelques-uns des résultats auxquels conduit la théorie du mouvement varié de la chaleur dans un corps homogène 421

Nos Pages
178. De la chaleur centrale de la Terre 422
179. Diminution de la durée du jour due au refroidissement de la Terre 423

CHAPITRE X.

DE LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE.

180. Formules générales 427
181. Cas où l'astre est éloigné de l'horizon 430
182. Cas où l'astre est voisin de l'horizon 432

CHAPITRE XI.

INÉGALITÉS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES DUES A L'ELLIPTICITÉ DU SOLEIL.

183. Équations générales 437
184. Application à Mercure 440

CHAPITRE XII.

INTRODUCTION A LA THÉORIE DE LA LUNE.

185. Equations générales 443
186. Classification des quantités du premier et du second ordre 450
187, 188, 189. Détermination des inégalités 452
190. Des inégalités dues à la non-sphéricité de la Terre 457

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

Pages	Lignes	*au lieu de*	*lisez*
39	1 en remontant	indiquer	intégrer
47	5	k	k^2
49	2	$\sqrt{1+\frac{hk^2}{\mu}\cos(\nu-\omega)}$	$\sqrt{1+\frac{hk^2}{\mu}\cos(\nu-\omega)}$
74	7 en remontant	longitude	latitude
79	8	de coordonnées	des coordonnées
214	1 en remontant	$\frac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon'+$	$\frac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon'')$
225	6 en remontant	84	84*
231	11 en remontant	85	85*
236	16	85	85*
250	2	qui est	qui soit
278	10 en remontant	$-\frac{n^2}{2}, -\frac{M\varphi}{2}$	$+\frac{n^2}{2}, +\frac{M\varphi}{2}$
	3 en remontant	$-M$	$+M$
	1 en remontant	$-\varphi$	$+\varphi$
279	4	$\frac{\varphi}{2}+E$	$E-\frac{\varphi}{2}$
285	8	0,08	0,8
342	4 en remontant	85	85*
346	10 en remontant	84	84*
	9 en remontant	85	85*
348	12	85	85*
	11 en remontant	84	84*
352	1	85	85*
	5	84	84*
458	16	84 et 85	84* et 85*

INTRODUCTION.

I.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

1. Considérons un système formé de n points matériels, dont nous représenterons les masses par $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Soient x, y, z les coordonnées, parallèles à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, de l'un quelconque m de ces points; X, Y, Z les composantes parallèles aux axes ci-dessus de la force qui sollicite ce point.

Celles de ces six quantités qui se rapporteront à la masse m_i seront caractérisées par l'indice i.

Nous supposerons que

$$\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

est la différentielle exacte d'une fonction U des $3n$ coordonnées des points m_i, de sorte que nous aurons

$$(1) \qquad X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz}.$$

Cette fonction est appelée *fonction des forces* ou *potentiel*.

Pour nous placer au point de vue le plus général, nous admettrons que les $3n$ coordonnées des points m_i sont reliées entre elles par ν équations

$$(2) \qquad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \ldots, \quad L_\nu = 0,$$

ν étant évidemment inférieur à $3n$. Ces équations ont reçu le nom d'*équations de liaisons,* ou plus simplement celui de *liaisons.*

Désignons par δx, δy, δz des déplacements virtuels de m parallèles à Ox, Oy, Oz, compatibles avec les liaisons, c'est-à-dire tels que $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ satisfassent aux équations (2), comme x, y, z.

En vertu du principe du travail virtuel, les équations du mouvement des points m_i seront comprises dans la suivante :

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=\Sigma(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z)$$

ou plus simplement

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=\delta U, \tag{3}$$

δU étant la différentielle totale de la fonction U par rapport à la caractéristique δ, c'est-à-dire l'accroissement infiniment petit du premier ordre de la valeur de cette fonction quand on y remplace les x, y, z par $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$.

Des équations (2) on déduit les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dL_1}{dx_1}\delta x_1+\frac{dL_1}{dy_1}\delta y_1+\frac{dL_1}{dz_1}\delta z_1+\frac{dL_1}{dx_2}\delta x_2+\frac{dL_1}{dy_2}\delta y_2+\frac{dL_1}{dz_2}\delta z_2+\ldots=0,\\
&\frac{dL_2}{dx_1}\delta x_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,\\
&\frac{dL_\nu}{dx_1}\delta x_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

qui permettent d'exprimer ν des $3n$ déplacements (*variations*) δx, δy, δz en fonction des $3n-\nu$ autres, et, en portant leurs valeurs dans la formule (3), on obtiendra une équation linéaire renfermant les variations restantes, et, comme ces variations sont arbitraires, leurs coefficients devront être égalés à zéro.

On arrivera ainsi à $3n-\nu$ équations entre les $3n$ coordonnées et le temps et, en y joignant les équations (2), on aura le nombre voulu

d'équations pour déterminer les coordonnées en fonction du temps.

Pour effectuer l'élimination des variations, nous ajouterons l'équation (1) aux équations (2) respectivement multipliées par les coefficients indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ et, dans le résultat obtenu, nous égalerons à zéro les coefficients de toutes les variations. Nous obtiendrons ainsi les $3n$ équations suivantes :

$$
(5)\qquad
\begin{cases}
X_1 - m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{dL_1}{dx_1} + \lambda_2\dfrac{dL_2}{dx_1} + \ldots + \lambda_\nu\dfrac{dL_\nu}{dx_1} = 0, \\
Y_1 - m\dfrac{d^2y_1}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{dL_1}{dy_1} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_\nu\dfrac{dL_\nu}{dy_1} = 0, \\
Z_1 - m\dfrac{d^2z_1}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{dL_1}{dz_1} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_\nu\dfrac{dL_\nu}{dz_1} = 0; \\
X_2 - m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{dL_1}{dx_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
Z_n - m\dfrac{d^2z_n}{dt^2} + \lambda_1\dfrac{dL_1}{dz_n} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.
\end{cases}
$$

En éliminant entre elles les coefficients indéterminés, nous obtiendrons $3n - \nu$ relations entre les coordonnées et le temps qui, jointes aux équations (2), donneront les $3n$ équations du mouvement.

2. Équations du mouvement dans un système de coordonnées quelconques. — Formules de Lagrange. — On peut admettre que, au moyen des équations (2), ν des $3n$ coordonnées x, y, z puissent s'exprimer au moyen des $3n - \nu$ autres considérées comme des variables; à ces variables, et par certaines relations, on pourra substituer autant d'autres variables, et même en nombre inférieur, en raison de relations établies entre ces dernières variables.

En conséquence, nous supposerons dorénavant que les $3n$ coordonnées x, y, z sont exprimables en fonction de k autres variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_k$, dont le nombre ne peut être qu'inférieur à $3n$. Jusqu'à nouvel ordre, nous pourrons admettre que les relations qui existent entre les x, y, z et les u peuvent renfermer le temps.

Nous désignerons par x', y', z', u' les dérivées totales de x, y, z, u par rapport au temps.

Nous avons

$$(6)\quad \begin{cases} \delta x = \dfrac{dx}{du_1}\delta u_1 + \dfrac{dx}{du_2}\delta u_2 + \ldots + \dfrac{dx}{du_k}\delta u_k, \\ \delta y = \dfrac{dy}{du_1}\delta u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta z = \dfrac{dz}{du_1}\delta u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta \mathrm{U} = \dfrac{d\mathrm{U}}{du_1}\delta u_1 + \dfrac{d\mathrm{U}}{du_2}du_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (3) et identifiant dans les deux membres les coefficients de δu, on trouve

$$\frac{d\mathrm{U}}{du} = \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{du} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{du} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{du}\right).$$

Mais on a, par exemple,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{du} = \frac{dx'}{dt}\frac{dx}{du} = \frac{d}{dt}x'\frac{dx}{du} - x'\frac{d}{dt}\frac{dx}{du};$$

il vient donc

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{U}}{du} = \dfrac{d}{dt}\sum m\left(x'\dfrac{dx}{du} + y'\dfrac{dy}{du} + z'\dfrac{dz}{du}\right) \\ \qquad\qquad - \sum m\left(x'\dfrac{d}{dt}\dfrac{dx}{du} + y'\dfrac{d}{dt}\dfrac{dy}{du} + z'\dfrac{d}{dt}\dfrac{dz}{du}\right). \end{cases}$$

De la relation

$$(a)\quad x' = \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{du_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{dx}{du_2}\frac{du_2}{dt} + \ldots = \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{du_1}u'_1 + \frac{dx}{du_2}u'_2 + \ldots$$

on déduit

$$(8)\qquad \frac{dx}{du} = \frac{dx'}{du'}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{dx}{du} &= \frac{d^2x}{du\,dt} + \frac{d^2x}{du\,du_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{d^2x}{du\,du_2}\frac{du_2}{dt} + \ldots \\ &= \frac{d^2x}{du\,dt} + \frac{d^2x}{du\,du_1}u'_1 + \frac{d^2x}{du\,du_2}u'_2 + \ldots. \end{aligned}$$

Mais, en dérivant l'équation (a) par rapport à u, on voit que le second

membre de la formule précédente n'est autre chose que $\frac{dx'}{du}$; nous avons donc

$$\frac{d}{dt}\frac{dx}{du} = \frac{dx'}{du}. \tag{9}$$

Si l'on substitue les valeurs (8) et (9), ainsi que celles en y, z qui s'en déduisent, dans l'équation (7), on trouve

$$\frac{d\mathrm{U}}{du} = \frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{dx'}{du'} + y'\frac{dy'}{du'} + z'\frac{dz'}{du'}\right) - \sum m\left(x'\frac{dx'}{du} + y'\frac{dy'}{du} + z'\frac{dz'}{du}\right)$$

ou, en représentant par

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

la demi-force vive du système,

$$d\frac{d\mathrm{T}}{du'} - \frac{d\mathrm{T}}{du} = \frac{d\mathrm{U}}{du}. \tag{10}$$

Les équations du mouvement du système se déduiront de cette formule en y remplaçant successivement u par u_1, u_2, ..., u_k; et, en faisant la somme de ces équations multipliées respectivement par les variations arbitraires δu_1, δu_2, ..., elles seront toutes comprises dans la suivante :

$$\sum\left(d\frac{d\mathrm{T}}{du'} - \frac{d\mathrm{T}}{du}\right)\delta u = \delta\mathrm{U}. \tag{11}$$

3. Équations d'Hamilton. — Nous supposerons dorénavant que les relations entre les $3n$ coordonnées x, y, z et les k variables u sont indépendantes du temps; la fonction T ne dépendra plus alors que de ces variables et de leurs dérivées u' par rapport au temps.

En remarquant, par exemple, que l'on a

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{dx}{du_2}\frac{du_2}{dt} + \ldots = \sum\frac{dx}{du}u',$$

on voit que x', y', z' sont des fonctions linéaires des u' et que, par

suite, T est une fonction homogène du second degré en $u'_1, u'_2, \ldots$; et, en posant

$$p = \frac{d\mathrm{T}}{du'}, \tag{b}$$

nous aurons, d'après un théorème connu,

$$2\mathrm{T} = p_1 u'_1 + p_2 u'_2 + \ldots = \Sigma p u'. \tag{12}$$

Il est évident, en raison de ce que l'on vient de dire, que les p_i sont des fonctions linéaires des u'_i et que, inversement, les u'_i pourront s'exprimer linéairement au moyen des p_i que nous leur substituerons. En nous plaçant à ce nouveau point de vue, nous emploierons la caractéristique d, au lieu de d, dans la représentation des dérivées partielles; ainsi, par exemple, $\frac{\mathrm{d}\mathrm{T}}{\mathrm{d}u}$ sera la différentielle partielle par rapport à u de la fonction T des p et des u.

Nous avons ainsi

$$(c)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathrm{T}}{\mathrm{d}u} = \dfrac{d\mathrm{T}}{du} + \dfrac{d\mathrm{T}}{du'_1}\dfrac{du'_1}{du} + \dfrac{d\mathrm{T}}{du'_2}\dfrac{du'_2}{du} + \ldots = \dfrac{d\mathrm{T}}{du} + p_1\dfrac{du'_1}{du} + p_2\dfrac{du'_2}{du} + \ldots, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathrm{T}}{\mathrm{d}p} = \dfrac{d\mathrm{T}}{du'_1}\dfrac{du'_1}{dp} + \dfrac{d\mathrm{T}}{du'_2}\dfrac{du'_2}{dp} + \ldots = p_1\dfrac{du'_1}{dp} + p_2\dfrac{du'_2}{dp} + \ldots. \end{cases}$$

Si l'on différentie successivement l'équation (12) par rapport à u et à p, on voit que

$$(d)\quad \begin{cases} 2\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{T}}{\mathrm{d}u} = p_1\dfrac{du'_1}{du} + p_2\dfrac{du'_2}{du} + \ldots, \\ 2\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{T}}{\mathrm{d}p} = u' + p_1\dfrac{du'_1}{dp} + p_2\dfrac{du'_2}{dp} + \ldots \end{cases}$$

En comparant entre elles les premières, puis les secondes des équations (c) et (d), il vient

$$\frac{d\mathrm{T}}{du} = -\frac{\mathrm{d}\mathrm{T}}{\mathrm{d}u}, \quad u' = \frac{\mathrm{d}\mathrm{T}}{\mathrm{d}p}. \tag{13}$$

L'équation (10), mise sous la forme

$$\frac{dp}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{du} = \frac{d\mathrm{U}}{du},$$

se trouve ainsi remplacée par ces deux autres :

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}u} + \frac{d\mathrm{U}}{du}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}p}. \tag{14}$$

En posant

$$\mathrm{T} - \mathrm{U} = \mathrm{H} \tag{e}$$

et remarquant que U est indépendant des u' par suite des p, on a

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}p};$$

les équations (14) deviennent ainsi

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}u}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}p}. \tag{15}$$

Les équations de cette forme ont reçu le nom d'*équations canoniques du mouvement*.

En retranchant l'une de l'autre les équations (15) multipliées respectivement par les variations arbitraires δu, δp de u et p, on obtient la suivante :

$$du\,\delta p - dp\,\delta u = dt\left(\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}u}\,\delta u + \frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}p}\,\delta p\right),$$

qui les comprend toutes les deux.

Si l'on ajoute les équations semblables à cette dernière, en y remplaçant successivement p par p_1, p_2, ..., en même temps que u par u_1, u_2, ..., il vient

$$\Sigma(du\,\delta p - dp\,\delta u) = dt\,\delta\mathrm{H}, \tag{16}$$

δH étant la variation totale de la fonction H quand on y remplace p_1, p_2, ..., u_1, u_2, ... par $p_1 + \delta p_1$, $p_2 + \delta p_2$, ..., $u_1 + \delta u_1$, $u_2 + \delta u_2$, ..., et il est clair que l'équation (16) comprend toutes celles du mouvement.

4. De la fonction principale. — Hamilton a donné ce nom à la fonction

$$\mathrm{S} = \int_0^t (\mathrm{T} + \mathrm{U})\,dt, \tag{17}$$

et l'on a

$$\delta S = \int_0^t \sum \left(\frac{dT}{du} \delta u + \frac{dT}{du'} \delta u' + \frac{dU}{du} \delta u \right) dt;$$

mais, en intégrant par parties, on voit que

$$\int \frac{dT}{du'} \delta u' \, dt = \int \frac{dT}{du'} \delta du = \int \frac{dT}{du'} d\delta u = \frac{dT}{du'} \delta u - \int \frac{d}{dt} \frac{dT}{du'} \cdot \delta u \, dt;$$

il vient, par suite,

$$\delta S = \left(\sum \frac{dT}{du'} \delta u \right)_0^t + \int_0^t \sum \left(\frac{dT}{du} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{du'} + \frac{dU}{du} \right) \delta u \, dt$$

ou simplement, en vertu de l'équation (10),

$$\delta S = \sum \frac{dT}{du'} \delta u - \sum \left(\frac{dT}{du'} \right)_0 \delta u_0, \tag{18}$$

l'indice 0 caractérisant les quantités qui se rapportent à l'instant initial ou à $t = 0$.

On déduit de là

$$\frac{dS}{du} = \frac{dT}{du'} = p, \tag{19}$$

$$\frac{dS}{du_0} = -\left(\frac{dT}{du'} \right)_0 = -p_0. \tag{19'}$$

Ces deux équations comprennent toutes celles du mouvement, car, en y faisant successivement $u = u_1, u_2, \ldots$, elles donneront $2k$ équations entre le temps, les inconnues u et les constantes arbitraires $(u)_0$, dépendant de l'état initial du mouvement.

5. Équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction principale. — D'après l'équation (18), la fonction S est indépendante des u' et ne renferme, par suite, que le temps et les u. Si donc on représente par $\left(\frac{dS}{dt} \right)$ la dérivée partielle de cette fonction par rapport au temps, l'équation (17) donne

$$\left(\frac{dS}{dt} \right) + \sum \frac{dS}{du} u' = T + U$$

ou, en nous reportant à la formule (19),

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) + \sum \frac{dT}{du'} u' = T + U.$$

Mais, en nous rappelant que T est une fonction homogène du second degré des u', nous avons

$$\sum \frac{dT}{du'} u' = 2T;$$

par suite,

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) = U - T = -H. \tag{20}$$

Comme au n° 3, nous supposerons que T est exprimé au moyen des u et des $p = \frac{dT}{du'}$, et nous poserons

$$T = F(p_1, p_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots) = F\left(\frac{dT}{du'_1}, \frac{dT}{du'_2}, \ldots, u_1, u_2, \ldots\right) \tag{f}$$

ou, en nous reportant à l'équation (19),

$$T = F\left(\frac{dS}{du_1}, \frac{dS}{du_2}, \ldots, u_1, u_2, \ldots\right). \tag{g}$$

De la formule (20) on déduit alors l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) = U - F\left(\frac{dS}{du_1}, \frac{dS}{du_2}, \ldots, u_1, u_2, \ldots\right), \tag{21}$$

à laquelle doit satisfaire la fonction S.

On obtient de la même manière, en ayant égard à l'équation (19′),

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_0 = U_0 - F\left[-\left(\frac{dS}{du_1}\right)_0, -\left(\frac{dS}{du_2}\right)_0, \ldots, (u_1)_0, (u_2)_0, \ldots\right]. \tag{22}$$

6. Théorème de Jacobi. — Il s'agit de démontrer que toute intégrale de l'équation (21), renfermant k constantes arbitraires, donne la solution du problème de Mécanique.

Soit, en effet,

$$S = f(t, u_1, u_2, \ldots, u_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \tag{23}$$

une de ces intégrales, dans laquelle les α sont k constantes arbitraires.

Nous avons à prouver que, si $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_k$ désignent k autres constantes arbitraires, toutes les équations dont le type est

$$\frac{dS}{d\alpha} = \alpha' \tag{24}$$

donneront la solution complète du problème, c'est-à-dire qu'elles fourniront les valeurs des u en fonction de t et de $2k$ constantes arbitraires.

En différentiant l'équation précédente par rapport au temps, on a

$$0 = \frac{d^2S}{d\alpha\, dt} + \frac{d^2S}{d\alpha\, du_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{d^2S}{d\alpha\, du_2}\frac{du_2}{dt} + \ldots$$

ou plus simplement

$$0 = \frac{d^2S}{d\alpha\, dt} + \sum \frac{d^2S}{d\alpha\, du}\, u'. \tag{25}$$

L'équation (21), différentiée par rapport à α, donne aussi

$$\frac{d^2S}{d\alpha\, dt} + \sum \frac{dF}{d\left(\frac{dS}{du}\right)}\frac{d^2S}{d\alpha\, du} = 0.$$

Pour que ces deux dernières équations soient compatibles, il faut que l'on ait

$$u' = \frac{dF}{d\left(\frac{dS}{du}\right)}. \tag{26}$$

La seconde des équations (13) donne

$$u' = \frac{dT}{dp} = \frac{dF}{dp}. \tag{27}$$

Les équations (26) et (27) sont les types de deux systèmes d'équations qui doivent être identiques, ce qui exige que $p = \frac{dS}{du}$; on retombe ainsi sur l'équation (19).

Si l'on différentie cette dernière équation par rapport à t et l'équation (21) par rapport à u, on trouve

$$\frac{d^2S}{du\,dt}+\frac{d^2S}{du\,du_1}u'_1+\frac{d^2S}{du\,du_2}u'_2+\ldots=\frac{dp}{dt},$$

$$\frac{d^2S}{du\,dt}+\frac{dF}{d\left(\frac{dS}{du_1}\right)}\frac{d^2S}{du\,du_1}+\frac{dF}{d\left(\frac{dS}{du_2}\right)}\frac{d^2S}{du\,du_2}+\ldots+\frac{dF}{du}=\frac{dU}{du};$$

d'où, par comparaison, en ayant égard à la relation (26),

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dU}{du}-\frac{dF}{du}=-\frac{dH}{du},$$

ce qui n'est autre chose que ce que devient la première des équations (15), en y supprimant la distinction entre les caractéristiques d et d, devenue dorénavant inutile.

Donc les valeurs des inconnues déterminées par les équations représentées par le type (24) satisfont aux équations différentielles du mouvement, et c'est ce qu'il fallait établir.

Supposons la fonction S définie par l'équation (21) ou (20); nous avons

$$\frac{dS}{dt}=\left(\frac{dS}{dt}\right)+\Sigma u'\frac{dS}{du}=-H+\Sigma u'\frac{dS}{du}$$

ou, en vertu de la formule (19) et de celle qui précède la formule (20),

$$\frac{dS}{dt}=-H+\Sigma\frac{dT}{du'}u'=-H+2T,$$

d'où

$$S=\int_0^t(2T-H)dt=\int_0^t(T+U)dt,$$

ce qui s'accorde bien avec la définition de S donnée au n° 4.

Les deux systèmes d'équations dont les types sont respectivement les équations (19) et (24) sont comprises dans la formule

$$\delta S=\Sigma(p\,\delta u+\alpha'\delta\alpha), \tag{28}$$

qui représente en même temps les intégrales premières et finales des équations du mouvement.

7. De la fonction caractéristique. — Hamilton a désigné ainsi la fonction

$$V = 2\int_0^t T\,dt \tag{29}$$

qui sert de point de départ dans la question du principe de la moindre action.

Nous avons, par définition,

$$S = \int_0^t (T + U)\,dt = \int_0^t (2T - H)\,dt = V - \int_0^t H\,dt.$$

Mais, en vertu du principe des forces vives, la quantité H est constante : il vient donc

$$S = V - Ht, \tag{30}$$

et, en différentiant par rapport à t,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dV}{dt} - H$$

ou, en vertu de l'équation (20),

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Ainsi donc la fonction V ne renferme pas explicitement le temps et peut, par suite, être substituée avec avantage à la fonction S.

En considérant maintenant V comme étant une fonction de u et de H, l'équation (30) donne

$$\frac{dS}{du} = \frac{dV}{du}, \quad \frac{dS}{dH} = -t + \frac{dV}{dH}, \quad \frac{dS}{dt} = -H, \tag{31}$$

et, en portant la première et la dernière de ces valeurs dans l'équation (21), on trouve

$$F\left(\frac{dV}{du_1}, \frac{dV}{du_2}, \ldots, u_1, u_2, \ldots\right) = H + U \tag{32}$$

pour l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction caractéristique.

8. Le temps n'entrera pas explicitement dans les intégrales dont les types sont fournis par les équations (15), si l'on met ces intégrales sous la forme suivante :

$$(33)\qquad -\frac{dp_1}{\frac{d\mathrm{H}}{du_1}} = -\frac{dp_2}{\frac{d\mathrm{H}}{du_2}} = \ldots = \frac{du_1}{\frac{d\mathrm{H}}{dp_1}} = \frac{du_2}{\frac{d\mathrm{H}}{dp_2}} = \ldots,$$

et le temps ne sera introduit qu'à la fin du calcul et accompagné d'une seule constante arbitraire l dans les quadratures

$$(34)\quad t + l = -\int dp_1 : \frac{d\mathrm{H}}{du_1} = -\int dp_2 : \frac{d\mathrm{H}}{du_2} = \ldots = \int du_1 : \frac{d\mathrm{H}}{dp_1} = \int du_2 : \frac{d\mathrm{H}}{dp_2} \ldots$$

Mais nous venons de voir que

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{H}} = -t + \frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{H}},$$

et, comme H est une des constantes arbitraires de la solution complète de l'équation (21), on obtiendra, d'après le n° 6, une des intégrales en égalant la dérivée précédente de S à une autre constante arbitraire C; on aura donc

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{H}} = \mathrm{C}$$

et

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{H}} = t + \mathrm{C}.$$

Cette dernière intégrale devant coïncider avec l'une de celles qui sont comprises dans la formule (34), on doit avoir $\mathrm{C} = l$, et il vient alors

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{H}} = l, \\ \dfrac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{H}} = t + l. \end{cases}$$

9. **Méthode d'intégration de Jacobi.** — En général, la détermination de S ou de V suppose que le problème du mouvement a été résolu; car la théorie connue des équations aux dérivées partielles, appliquée à l'une ou l'autre des équations (21) et (32), conduit à des équations différentielles simultanées qu'il faut d'abord intégrer, mais

qui ne peuvent être autre chose que les équations (14) du mouvement. Cependant les propriétés des fonctions S et V permettent, dans certains cas où l'on connaît un nombre déterminé d'intégrales, de trouver les autres à l'aide d'une méthode générale due à Jacobi, et que nous nous bornerons à appliquer au cas de deux variables u, u_1, le seul qui se présente dans la théorie du Système du monde.

Les équations types (15) du n° 3 nous donnent, pour les équations du mouvement,

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}=\dfrac{d\mathrm{H}}{dp}, & \dfrac{du_1}{dt}=\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_1}, \\ \dfrac{dp}{dt}=-\dfrac{d\mathrm{H}}{du}, & \dfrac{dp_1}{dt}=-\dfrac{d\mathrm{H}}{du_1}, \end{cases}$$

en nous rappelant que nous avons posé

$$(b)\qquad p=\frac{d\mathrm{T}}{du'},\quad p_1=\frac{d\mathrm{T}}{du'_1}.$$

Supposons que, outre l'intégrale

$$(c)\qquad \mathrm{H}=\text{const.},$$

fournie par le principe des forces vives, on en connaisse une autre de la forme

$$(d)\qquad \mathrm{K}=\text{const.}$$

K étant une fonction de u, u_1, p, p_1 qui ne renferme pas t; nous avons

$$d\mathrm{K}=\frac{d\mathrm{K}}{du}du+\frac{d\mathrm{K}}{du_1}du_1+\frac{d\mathrm{K}}{dp}dp+\frac{d\mathrm{K}}{dp_1}dp_1=0$$

ou

$$\frac{d\mathrm{K}}{du}\frac{du}{dt}+\frac{d\mathrm{K}}{du_1}\frac{du_1}{dt}+\frac{d\mathrm{K}}{dp}\frac{dp}{dt}+\frac{d\mathrm{K}}{dp_1}\frac{dp_1}{dt}=0.$$

Si nous posons

$$(e)\qquad (\mathrm{H},\mathrm{K})=\frac{d\mathrm{H}}{dp}\frac{d\mathrm{K}}{du}-\frac{d\mathrm{H}}{du}\frac{d\mathrm{K}}{dp}+\frac{d\mathrm{H}}{dp_1}\frac{d\mathrm{K}}{du_1}-\frac{d\mathrm{H}}{du_1}\frac{d\mathrm{K}}{dp_1},$$

l'équation précédente, en ayant égard aux valeurs (a), se réduit à

$$(f)\qquad (\mathrm{H},\mathrm{K})=0.$$

Supposons maintenant que p et p_1 soient exprimés en fonction de u et u_1, au moyen des équations (c) et (d); ces deux équations, différentiées successivement par rapport à u et u_1, donneront les suivantes :

$$0 = \frac{d\mathrm{H}}{du} + \frac{d\mathrm{H}}{dp}\frac{dp}{du} + \frac{d\mathrm{H}}{dp_1}\frac{dp_1}{du},$$

$$0 = \frac{d\mathrm{K}}{du} + \frac{d\mathrm{K}}{dp}\frac{dp}{du} + \frac{d\mathrm{K}}{dp_1}\frac{dp_1}{du},$$

$$0 = \frac{d\mathrm{H}}{du_1} + \frac{d\mathrm{H}}{dp}\frac{dp}{du_1} + \frac{d\mathrm{H}}{dp_1}\frac{dp_1}{du_1},$$

$$0 = \frac{d\mathrm{K}}{du_1} + \frac{d\mathrm{K}}{dp}\frac{dp}{du_1} + \frac{d\mathrm{K}}{dp_1}\frac{dp_1}{du_1}.$$

Si l'on élimine $\frac{dp}{dt}$ entre les deux premières d'entre elles, et $\frac{dp_1}{du_1}$ entre les deux autres, puis qu'on fasse la somme des résultats obtenus, on trouve

$$(\mathrm{H}, \mathrm{K}) + \left(\frac{d\mathrm{K}}{dp}\frac{d\mathrm{H}}{dp_1} - \frac{d\mathrm{H}}{dp}\frac{d\mathrm{K}}{dp_1}\right)\left(\frac{dp}{du_1} - \frac{dp_1}{du}\right) = 0;$$

d'où, en ayant égard à la formule (f),

$$(g) \qquad \frac{dp_1}{du} = \frac{dp}{du_1}.$$

Il suit de là que $p\,du + p_1\,du_1$ est une différentielle exacte, et que l'on peut obtenir l'intégrale

$$(h) \qquad \mathrm{V} = f(p\,du + p_1\,du_1),$$

qui, renfermant la constante K et une autre constante introduite par l'intégration, est une solution complète de l'équation (32) ou la fonction caractéristique; donc, d'après les formules (24), (30) et la seconde des formules (35), nous aurons

$$(36) \qquad \frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{K}} = \text{const.} = \frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{K}}, \quad \frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{H}} = t + l \ (^1)$$

pour les deux intégrales qu'il restait à trouver.

---

(1) Il est facile de constater directement l'exactitude de ces résultats. En effet, de la se-

Connaissant la fonction V, on en déduira immédiatement (n° 7) celle

$$S = V - Ht$$

de la fonction principale.

10. Méthode de la variation des constantes arbitraires. — Formule de Lagrange. — Supposons que H se compose de deux parties H_1, H_2, ou que $H = H_1 + H_2$, et que l'on connaisse les intégrales des équations ayant pour types

$$(a) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{dH_1}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dH_1}{du},$$

qui seraient, d'après les formules (15) du n° 3, celles du mouvement si H_2 était nul; soit

$$(b) \qquad o = f(t, u_1, u_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots)$$

l'une de ces intégrales renfermant les $2k$ constantes arbitraires α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_k$.

Proposons-nous de représenter les intégrales relatives à la valeur totale de H par des équations de la forme (b), dans lesquelles les α et α' ne représenteront plus des constantes, mais des fonctions du temps qu'il faudra déterminer.

Les variations que du et dp éprouveront par suite de la considération du terme H_2, dans la désignation desquelles nous emploierons la caractéristique d' substituée à d, auront pour valeurs

$$(c) \qquad d'u = \frac{dH_2}{dp}\,dt, \quad d'p = -\frac{dH_2}{du}\,dt$$

---

conde des formules (15) on déduit

$$du = \frac{dH}{dp}\,dt, \quad du_1 = \frac{dH}{dp_1}\,dt,$$

et l'équation (h) donne par suite, en remarquant que la différentielle totale de H est nulle,

$$d\frac{dV}{dK} = \frac{dp}{dK}\,du + \frac{dp_1}{dK}\,du_1 = \left(\frac{dp}{dK}\frac{dH}{dp} + \frac{dp_1}{dK}\frac{dH}{dp_1}\right)dt = \frac{dH}{dK}\,dt = o, \quad \text{d'où} \quad \frac{dV}{dK} = \text{const.},$$

$$d\frac{dV}{dH} = \frac{dp}{dH}\,du + \frac{dp_1}{dH}\,du_1 = \left(\frac{dp}{dH}\frac{dH}{dp} + \frac{dp_1}{dH}\frac{dH}{dp_1}\right)dt = \frac{dH}{dH}\,t = t, \quad \text{d'où} \quad \frac{dV}{dH} = t + \text{const.}$$

et toutes les formules que l'on déduira de ces dernières seront comprises dans la suivante :

$$(d) \qquad \Sigma(d'u\,\delta p - d'p\,\delta u) = dt\,\delta H_2.$$

Les différentielles (c) résulteront des accroissements $d\alpha, \ldots, d\alpha'$ donnés à $\alpha, \ldots, \alpha', \ldots$ dans les équations dont le type est (b), sans faire varier le temps qui y entre explicitement, ou encore ces différentielles s'obtiendront par une opération identique à celle par laquelle on obtient les $\delta u, \delta p, \ldots$, en remplaçant δ par d devant les constantes.

Nous avons trouvé, à la fin du n° 6, la relation

$$(e) \qquad \delta S = \Sigma(p\,\delta u + \alpha'\,\delta\alpha),$$

d'où l'on déduit, d'après les observations que nous venons de faire,

$$(e') \qquad d'S = \Sigma(p\,d'u + \alpha'\,d\alpha).$$

Si nous différentions respectivement ces deux équations par rapport aux caractéristiques d' et δ, en remarquant que $d'\delta S = \delta d'S$, $d'\delta u = \delta d'u$, elles donnent, par différence,

$$\Sigma(d'u\,\delta p - d'p\,\delta u) = \Sigma(d\alpha'\,\delta\alpha - d\alpha\,\delta\alpha')$$

ou, en vertu de la relation (d),

$$\Sigma(d\alpha'\,\delta\alpha - d\alpha\,\delta\alpha') = dt\,\delta H_2,$$

équation qui se décompose en $2k$ autres, ayant pour types

$$(37) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{dH_2}{d\alpha'}, \quad \frac{d\alpha'}{dt} = \frac{dH_2}{d\alpha};$$

on voit donc que, si S est la fonction principale, dans l'hypothèse de $H_2 = 0$, et si (n° 5) on pose $\frac{dS}{d\alpha} = \alpha'$, les arbitraires se trouvent partagées en deux séries qui se correspondent deux à deux, de manière à satisfaire aux équations (37).

Si, au lieu de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_k$, on introduit d'autres arbitraires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, celles-ci ne pourront être que des fonctions des premières, et leurs différentielles seront de la forme

$$d\beta_m = \frac{d\beta_m}{d\alpha_1}\,d\alpha_1 + \frac{d\beta_m}{d\alpha'_1}\,d\alpha'_1 + \frac{d\beta_m}{d\alpha_2}\,d\alpha_2 + \frac{d\beta_m}{d\alpha'_2}\,d\alpha'_2 + \ldots$$

ou, remplaçant les dx et dx' par leurs valeurs tirées des équations (37),

$$(f)\qquad d\beta_m = dt\left(\frac{d\beta_m}{dx'_1}\frac{d\mathrm{H}_2}{dx_1} - \frac{d\beta_m}{dx_1}\frac{d\mathrm{H}_2}{dx'_1} + \frac{d\beta_m}{dx'_2}\frac{d\mathrm{H}_2}{dx_2} - \frac{d\beta_m}{dx_2}\frac{d\mathrm{H}_2}{dx'_2} + \dots\right);$$

mais nous avons

$$\frac{d\mathrm{H}_2}{dx_1} = \frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_1}\frac{d\beta_1}{dx_1} + \frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_2}\frac{d\beta_2}{dx_1} + \dots, \qquad \frac{d\mathrm{H}_2}{dx'_1} = \frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_2}\frac{d\beta_1}{dx'_1} + \dots,$$

$$\frac{d\mathrm{H}_2}{dx_2} = \frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_1}\frac{d\beta_1}{dx_2} + \dots, \qquad \frac{d\mathrm{H}_2}{dx'_2} = \frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_2}\frac{d\beta_1}{dx'_2} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots$$

En substituant ces valeurs dans le facteur de dt du second membre de l'équation (f), on voit que le terme en $\frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_1}$ de ce coefficient est

$$\frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_1}\left(\frac{d\beta_m}{dx'_1}\frac{d\beta_1}{dx_1} - \frac{d\beta_m}{dx_1}\frac{d\beta_1}{dx'_1} + \frac{d\beta_m}{dx'_2}\frac{d\beta_1}{dx_2} - \frac{d\beta_m}{dx_2}\frac{d\beta_1}{dx'_2} + \dots\right).$$

Si donc nous posons

$$(38)\qquad (\beta_m, \beta_n) = \frac{d\beta_m}{dx'_1}\frac{d\beta_n}{dx_1} - \frac{d\beta_m}{dx_1}\frac{d\beta_n}{dx'_1} + \frac{d\beta_m}{dx'_2}\frac{d\beta_n}{dx} - \frac{d\beta_m}{dx_2}\frac{d\beta_n}{dx'_2} + \dots,$$

expression qui ne change pas de valeur, mais seulement de signe, quand on permute entre elles les lettres β_m et β_n, nous aurons

$$(39)\qquad d\beta_m = (\beta_m, \beta_1)\frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_1}\,dt + (\beta_m, \beta_2)\frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_2}\,dt + \dots$$

ou, plus simplement,

$$(39')\qquad d\beta_m = \Sigma(\beta_m, \beta_n)\frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_n}\,dt,$$

la somme Σ se rapportant aux valeurs successives de n depuis l'unité jusqu'à $2k$.

La formule (39′) est due à Lagrange.

MM. Poisson, Cauchy, Liouville et Bertrand ont fait connaître d'autres formules très remarquables se rapportant à la Mécanique analytique et que nous ne croyons pas devoir reproduire en raison de ce qu'elles ne nous seraient d'aucune utilité dans le cours de cet Ouvrage.

II.

DE L'EMPLOI DES COORDONNÉES ELLIPTIQUES DANS LA SOLUTION DE CERTAINS PROBLÈMES RELATIFS AU MOUVEMENT D'UN POINT DANS UN PLAN.

11. Considérons deux séries de coniques homofocales, l'une composées d'ellipses et l'autre d'hyperboles, courbes que nous rapporterons à leurs axes principaux.

Comme en chaque point (x, y) du plan on peut faire passer une ellipse et une hyperbole, les coordonnées x, y pourront s'exprimer en fonction des demi-axes focaux respectifs a, b des deux courbes; il suit de là que a et b pourront être substitués à x, y comme variables indépendantes.

Nous supposerons que la force qui sollicite le mobile m dérive d'un potentiel V, et nous désignerons par c l'excentricité constante des coniques et par ds l'élément de chemin décrit par m.

Des équations des deux coniques

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1,$$

on tire

$$x = \frac{ab}{c}, \quad y = \frac{1}{c}\sqrt{(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)}. \tag{1}$$

Nous supprimons les doubles signes, parce que nous conviendrons d'attribuer à b et $\sqrt{c^2 - b^2}$ des valeurs tantôt positives, tantôt négatives, ce qui revient à poser

$$b = c\cos\varphi,$$

d'où

$$x = a\cos\varphi, \quad y = \sqrt{a^2 - c^2}\sin\varphi.$$

Des équations (1) on déduit

$$(2)\qquad dx = \frac{a\,db + b\,da}{c}, \quad dy = \frac{1}{c}\left(\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}}\,a\,da - \sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2}}\,b\,db\right)$$

et, par suite,

$$(3)\qquad ds^2 = (a^2-b^2)\left(\frac{da^2}{a^2-c^2} + \frac{db^2}{c^2-b^2}\right).$$

Si nous posons

$$(4)\qquad \alpha = \int \frac{da}{\sqrt{a^2-c^2}}, \quad \beta = \int \frac{db}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

les quantités a et b pourront être considérées uniquement, la première comme une fonction de α, l'autre comme une fonction de β, et α et β deviendront aussi deux variables substituées à a et b.

Nous poserons de plus

$$(5)\qquad \alpha' = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \beta' = \frac{d\beta}{dt}, \quad \lambda = a^2 - b^2.$$

La formule (3) se réduit, par suite, à

$$ds^2 = \lambda(\alpha'^2 + \beta'^2)\,dt^2,$$

et, en désignant par A une constante dépendant uniquement des conditions initiales du mouvement, l'équation des forces vives donne

$$(6)\qquad \frac{\lambda}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2) = (V + A),$$

formule dans laquelle on pourra considérer V comme étant exprimée au moyen, soit de a, b, soit de α et β.

A l'équation (6), il nous suffira, pour arriver à la solution du problème, de joindre l'une des deux équations de la Mécanique analytique qui s'appliquent au problème actuel, et nous choisirons la suivante :

$$(7)\qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\alpha'} - \frac{dT}{d\alpha} = \frac{dV}{d\alpha},$$

dans laquelle T représente la demi-force vive

$$(8)\qquad T = \frac{\lambda}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2).$$

De cette dernière formule on déduit

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\alpha'} = \lambda\alpha', \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\alpha} = \tfrac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2)\,\frac{d\lambda}{d\alpha},$$

et l'équation (7) devient

$$\frac{d\lambda\alpha'}{dt} = \tfrac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2)\,\frac{d\lambda}{d\alpha} + \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha}$$

ou, en vertu de l'équation (6),

$$\frac{d\lambda\alpha'}{dt} = \frac{\mathrm{V} + \mathrm{A}}{\lambda}\,\frac{d\lambda}{d\alpha} + \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha}.$$

En multipliant cette dernière équation par $\lambda\,d\alpha$, elle prend la forme suivante :

$$\tfrac{1}{2}\,d(\lambda\alpha')^2 = \frac{d\lambda(\mathrm{V} + \mathrm{A})}{d\alpha}\,d\alpha. \tag{9}$$

Nous remarquerons que λ est la somme des deux fonctions de α et de β; dorénavant, nous ne considérerons que les cas où V est tel que λV est aussi une pareille somme. L'équation (9) peut alors s'intégrer et donne, en désignant par $\varphi(\beta)$ une fonction arbitraire de β,

$$\tfrac{1}{2}\lambda^2\,\frac{d\alpha^2}{dt^2} = \lambda(\mathrm{V} + \mathrm{A}) - \varphi(\beta). \tag{10}$$

En portant cette valeur dans l'équation (6), on trouve

$$\tfrac{1}{2}\lambda^2\,\frac{d\beta^2}{dt^2} = \varphi(\beta). \tag{11}$$

En divisant entre elles les équations (10) et (11), il vient

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\lambda(\mathrm{V} + \mathrm{A}) - \varphi(\beta)}} = \frac{d\beta}{\sqrt{\varphi(\beta)}}; \tag{12}$$

mais, comme la fonction $\varphi(\beta)$ est arbitraire, on peut la prendre égale à une constante arbitraire, augmentée du terme de $\lambda(\mathrm{V} + \mathrm{A})$ qui dépend uniquement de β, les variables seront alors séparées dans les deux membres de l'équation (12).

Supposons que, en vertu des relations (4), on substitue respective-

ment a et b aux variables α et β; d'après ce qui a été convenu, $V\lambda$ sera de la forme

$$\lambda V = F(a) - F_1(b). \tag{13}$$

On a d'ailleurs

$$\lambda = a^2 - b^2, \quad d\alpha = \frac{da}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad d\beta = \frac{db}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \tag{14}$$

et, en remplaçant la fonction arbitraire $\varphi(\beta)$ par $\psi(b)$, on a, au lieu de l'équation (12),

$$\frac{da}{\sqrt{a^2 - c^2}\sqrt{F(a) - F_1(b) + A(a^2 - b^2) - \psi(b)}} = \frac{db}{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\psi(b)}}.$$

En prenant

$$\psi(b) = B - F_1(b) - Ab^2,$$

B étant une constante arbitraire, il vient

$$\frac{da}{\sqrt{(a^2 - c^2)[F(a) + Aa^2 - B]}} = \frac{db}{\sqrt{(c^2 - b^2)[B - F_1(b) - Ab^2]}}. \tag{15}$$

L'équation (10) se transforme dans la suivante

$$\frac{1}{2}\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 - c^2}\frac{da^2}{dt^2} = Aa^2 + F(a) - B, \tag{16}$$

d'où

$$dt = \sqrt{\frac{1}{2}}\frac{(a^2 - b^2)\,da}{\sqrt{(a^2 - c^2)[F(a) + Aa^2 - B]}}$$

et, en ayant égard à l'équation (15),

$$dt = \frac{a^2\,da}{\sqrt{2(a^2 - c^2)[F(a) + Aa^2 - B]}} - \frac{b^2\,db}{\sqrt{2(c^2 - b^2)[B - F_1(b) - Ab^2]}}, \tag{17}$$

et l'on obtiendra aussi l'expression du temps par une double quadrature.

III.

SUR LE MOUVEMENT RELATIF D'UN SYSTÈME MATÉRIEL LIBRE, UNIQUEMENT SOUMIS A SES ACTIONS MUTUELLES, PAR RAPPORT A UN POINT DÉTERMINÉ DE CE SYSTÈME.

12. Soient

M, m, m', ... les masses des éléments matériels du système;

χ, η, ζ les coordonnées de M par rapport à trois axes fixes rectangulaires $O\chi$, $O\eta$, $O\zeta$;

(x, y, z), (x', y', z'), ... les coordonnées de m, m', ... par rapport à trois axes mobiles Mx, My, Mz, parallèles aux précédents, ayant pour origine le point M.

L'équation du mouvement de translation parallèle à $O\chi$ nous donne

$$M\frac{d^2\chi}{dt^2} + \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2\chi}{dt^2}\right) = 0,$$

d'où

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\chi}{dt^2} = -\dfrac{1}{M+\Sigma m}\Sigma m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \text{et de même} \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -\dfrac{1}{M+\Sigma m}\Sigma m\dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -\dfrac{1}{M+\Sigma m}\Sigma m\dfrac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

Les intégrales de ces équations nous étant inutiles, nous croyons devoir nous dispenser de les écrire.

Dans les équations du mouvement relatif du système par rapport aux axes Mx, My, Mz, nous n'avons à faire intervenir, comme forces apparentes, que les forces d'entraînement prises en sens contraire.

13. L'équation des moments par rapport à Mz sera ainsi

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)=-\Sigma m\left(y\frac{d^2\gamma}{dt^2}-x\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)$$

ou

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{d^2\gamma}{dt^2}\Sigma my-\frac{d^2\eta}{dt^2}\Sigma mx=0;$$

ou encore, en ayant égard aux valeurs (1),

$$(M+\Sigma m)\Sigma m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\Sigma mx\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}-\Sigma my\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

En désignant par C une constante, cette dernière équation a pour intégrale première

$$(M+\Sigma m)\Sigma m\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)+\Sigma mx\Sigma m\frac{dy}{dt}-\Sigma my\Sigma m\frac{dx}{dt}=C$$

ou

$$M\Sigma m\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)+\Sigma mx\Sigma m\frac{dy}{dt}-\Sigma m\Sigma mx\frac{dy}{dt}-\Sigma my\Sigma m\frac{dx}{dt}+\Sigma m\Sigma my\frac{dx}{dt}=C.$$

Le terme du premier membre de cette équation qui ne dépend que de m et m' a pour expression

$$\begin{aligned}&(mx+m'x')\left(m\frac{dy}{dt}+m'\frac{dy'}{dt}\right)-(m+m')\left(mx\frac{dy}{dt}+m'x'\frac{dy'}{dt}\right)\\&-(my+m'y')\left(m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}\right)+(m+m')\left(my\frac{dx}{dt}+m'y'\frac{dx'}{dt}\right)\\&=mm'\left[(y'-y)\frac{d(x'-x)}{dt}-(x'-x)\frac{d(y'-y)}{dt}\right].\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$(2)\quad\begin{cases}M\Sigma m\left(y\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dy}{dt}\right)+\Sigma mm'\left[(y'-y)\dfrac{d(x'-x)}{dt}-(x'-x)\dfrac{d(y'-y)}{dt}\right]=C,\\ \text{et de même}\\ M\Sigma m\left(x\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dx}{dt}\right)+\Sigma mm'\left[(x'-x)\dfrac{d(z'-z)}{dt}-(z'-z)\dfrac{d(x'-x)}{dt}\right]=C',\\ M\Sigma m\left(z\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dz}{dt}\right)+\Sigma mm'\left[(z'-z)\dfrac{d(y'-y)}{dt}-(y'-y)\dfrac{d(z'-z)}{dt}\right]=C'',\end{cases}$$

C', C'' étant deux nouvelles constantes.

14. Soient

V la vitesse relative du point m par rapport aux axes Mx, My, Mz;
U le potentiel des actions moléculaires développées dans tout le système;
h une constante.

Nous aurons, d'après un théorème connu dû à Coriolis,

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m V^2 = U - \int \Sigma m \left(\frac{d^2\gamma}{dt^2} dx + \frac{d^2\tau_i}{dt^2} dy + \frac{d^2\zeta}{dt^2} dz \right) + \frac{h}{2}$$

ou, en ayant égard aux valeurs (1),

$$\Sigma m V^2 - h = 2U + \frac{2}{M + \Sigma m} \int \left(\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} \Sigma m\, dx + \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} \Sigma m\, dy + \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} \Sigma m\, dz \right).$$

Nous avons, en développant les calculs,

$$2\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} \Sigma m\, dx = \left[m^2\, d\frac{dx^2}{dt} + 2mm' \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx' + \frac{d^2x'}{dt^2} dx \right) + m'^2 d\frac{dx'^2}{dt^2} + \dots \right].$$

Mais cette expression n'est autre chose que la différentielle de

$$\left(\Sigma m \frac{dx}{dt} \right)^2 = m^2 \frac{dx^2}{dt^2} + 2mm' \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + m'^2 \frac{dx'^2}{dt^2} + \dots;$$

d'où il suit que l'on a

$$\Sigma m V^2 - h = 2U + \frac{\left(\Sigma m \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\Sigma m \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\Sigma m \frac{dz}{dt} \right)^2}{M + \Sigma m}$$

ou encore

$$(3) \qquad \Sigma m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) = 2U + h + \frac{\left(\Sigma m \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\Sigma m \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\Sigma m \frac{dz}{dt} \right)^2}{M + \Sigma m}.$$

Les intégrales des équations (1) et les intégrales (2) et (3) sont les seules que l'on puisse déduire des équations du mouvement relatif

d'un système libre, soumis uniquement à des actions mutuelles, par rapport à un point de ce système.

Avant de terminer, nous ferons remarquer que l'équation (3) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}\Sigma m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)\\ &\quad=(2\mathrm{U}+h)(\mathrm{M}+\Sigma m)+\left(\Sigma m\frac{dx}{dt}\right)^2-\Sigma m\frac{dx^2}{dt^2}\Sigma m\\ &\qquad+\left(\Sigma m\frac{dy}{dt}\right)^2-\Sigma m\frac{dy^2}{dt^2}\Sigma m+\left(\Sigma m\frac{dz}{dt}\right)^2-\Sigma m\frac{dz^2}{dt^2}\Sigma m. \end{aligned}$$

En développant les calculs relativement aux Σ, on reconnaît facilement que l'on a

$$(3')\quad\left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}\Sigma m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)+\Sigma mm'\frac{(dx'-dx)^2+(dy'-dy)^2+(dz'-dz)^2}{dt^2}\\ &\quad=(2\mathrm{U}+h)(\mathrm{M}+\Sigma m). \end{aligned}\right.$$

IV.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS L'ESPACE D'UN POINT MATÉRIEL EXPRIMÉES EN COORDONNÉES POLAIRES.

15. Pour n'avoir à considérer que les accélérations, nous supposerons égale à l'unité la masse m du mobile, sauf à la réintégrer ensuite, comme facteur, dans les résultats obtenus quand cela sera nécessaire.

Soient

Ox, Oy, Oz trois axes coordonnés rectangulaires;

r le rayon vecteur Om;

θ l'angle qu'il forme avec la trace OI du plan zOm sur le plan xOy;

φ l'angle xOI;

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}$ les composantes de la force qui sollicite m suivant r, la perpendiculaire à Om dans le plan zOm dirigée vers Oz et la perpendiculaire à ce plan dans le sens de l'accroissement de φ.

L'équation des moments, dans le plan xOy, par rapport au point O, nous donne

$$(a) \qquad \frac{d}{dt}\left(r^2\cos^2\theta\frac{d\varphi}{dt}\right) = \mathfrak{T}\,r\cos\theta.$$

Nous avons maintenant à établir deux autres relations entre les éléments du mouvement et les composantes $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{T}$.

Le point m peut être considéré comme étant animé de trois mouvements simultanés : le premier a lieu suivant le rayon r; le second est celui dû à la rotation de ce rayon autour de O dans le plan zOI; le troisième est celui de ce plan autour de Oz.

Voyons d'abord ce qui a lieu dans le plan zOI, abstraction faite de

son mouvement de rotation. L'accélération relative de m suivant le rayon Om est $\frac{d^2r}{dt^2}$; la composante de l'accélération d'entraînement due à la rotation de ce rayon est $-r\frac{d\theta^2}{dt}$; la composante de l'accélération ci-dessus suivant la direction de $\mathfrak{M}$ est $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$; enfin l'accélération centrifuge composée, changée de sens, a pour valeur $2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt}$ et est également dirigée suivant $\mathfrak{M}$. L'accélération absolue dans le plan zOI a donc pour composantes

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2}, \qquad \text{suivant } \mathfrak{R},$$

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt}, \qquad \text{suivant } \mathfrak{M}.$$

Cette accélération devient une accélération relative dans le plan zOI. L'accélération centrifuge composée, changée de sens, due à la rotation $\frac{d\varphi}{dt}$ étant perpendiculaire à ce plan, il n'y a pas lieu d'en tenir compte. L'accélération d'entraînement donne les composantes

$$-r\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\cos\theta = -r\cos^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}, \qquad \text{suivant } \mathfrak{R},$$

$$r\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\sin\theta = r\cos\theta\sin\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}, \qquad \text{suivant } \mathfrak{M}$$

Nous avons donc, en définitive,

$$(b) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\varphi^2}{dt^2}\cos^2\theta - r\frac{d\theta^2}{dt^2} = \mathfrak{R}$$

$$(c) \qquad r\frac{d^2\theta}{dt^2} + r\frac{d\varphi^2}{dt^2}\sin\theta\cos\theta + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \mathfrak{M}$$

pour les équations qu'il s'agissait d'établir.

Considérons le mouvement de la projection m' de m sur OI; l'accélération relative de ce point dans le plan mOI est $\frac{d^2r\cos\theta}{dt^2}$; l'accélération d'entraînement donne suivant OI la composante $-r\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}$; il n'y a pas lieu de tenir compte de l'accélération centrifuge composée, chan-

gée de sens qui est perpendiculaire à OI. Nous avons donc

$$(d) \qquad \frac{d^2 r\cos\theta}{dt^2} - r\cos\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \mathfrak{R}\cos\theta - \mathfrak{M}\sin\theta,$$

équation que nous substituerons dorénavant à (b).

Supposons maintenant que la force dérive d'un potentiel Q; nous aurons, en égalant deux expressions du travail élémentaire,

$$\mathfrak{R}\,dr + \mathfrak{M}\,r\,d\theta + \mathfrak{S}\,r\cos\theta\,d\varphi = \frac{dQ}{dr}dr + \frac{dQ}{d\theta}d\theta + \frac{dQ}{d\varphi}d\varphi,$$

d'où

$$\mathfrak{R} = \frac{dQ}{dr}, \quad \mathfrak{M}\,r = \frac{dQ}{d\theta}, \quad \mathfrak{S}\,r\cos\theta = \frac{dQ}{d\varphi};$$

et les équations (d), (a), (c) deviennent

$$(A) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 r\cos\theta}{dt^2} - r\cos\theta\dfrac{d\varphi^2}{dt^2} = \dfrac{dQ}{dr}\cos\theta - \dfrac{1}{r}\dfrac{dQ}{d\theta}\sin\theta, \\ \dfrac{d}{dt}r^2\cos^2\theta\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{dQ}{d\varphi}, \\ r^2\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + r^2\dfrac{d\varphi^2}{dt^2}\sin\theta\cos\theta + 2r\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{dQ}{d\theta}. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous substituerons à la variable θ sa tangente s et à r l'inverse u de sa projection sur le plan xOy; en d'autres termes, nous poserons

$$s = \operatorname{tang}\theta, \quad u = \frac{1}{r\cos\theta},$$

$$ds = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}, \quad du = -u^2(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta),$$

et de l'identité

$$\frac{dQ}{dr}dr + \frac{dQ}{d\theta}d\theta = \frac{dQ}{du}du + \frac{dQ}{ds}ds$$

nous déduirons par suite

$$(e) \qquad \begin{cases} \dfrac{dQ}{dr} = -u^2\cos\theta\dfrac{dQ}{du}, \\ \dfrac{dQ}{d\theta} = u^2 r\sin\theta\dfrac{dQ}{du} + \dfrac{1}{\cos^2\theta}\dfrac{dQ}{ds}. \end{cases}$$

Si l'on multiplie la seconde des équations (A) par $r^2\cos^2\theta\,d\varphi$ et que

l'on effectue l'intégration, il vient, en désignant par h une constante,

$$\left(\frac{1}{u^2}\frac{dv}{dt}\right)^2 = h^2 + 2\int \frac{dQ}{dv}\frac{dv}{u^2},$$

d'où

$$(1) \qquad dt = \frac{dv}{u^2\sqrt{h^2 + 2\int \frac{dQ}{dv}\frac{dv}{u^2}}}.$$

En ayant égard à ce qui précède, la première des mêmes équations prend la forme

$$\frac{d^2\frac{1}{u}}{dt} - \frac{1}{u}\frac{dv^2}{dt^2} = -u^2\frac{dQ}{du} - us\frac{dQ}{ds}$$

ou

$$d\left(\frac{1}{u^2}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dt}\right) + \frac{1}{u}\frac{dv^2}{dt^2} = u^2\left(\frac{dQ}{du} + \frac{s}{u}\frac{dQ}{ds}\right)dt.$$

En remplaçant dt par sa valeur (1), en vue de substituer v à la variable t, on trouve

$$(2) \qquad \frac{d^2u}{dv^2} + u + \frac{\frac{dQ}{dv}\frac{1}{u^2}\frac{du}{dv} - \frac{dQ}{du} - \frac{s}{u}\frac{dQ}{ds}}{h^2 + 2\int \frac{dQ}{dv}\frac{dv}{u^2}} = 0.$$

La troisième des équations (A) donne de la même manière

$$(3) \qquad \frac{d^2s}{dv^2} + s + \frac{\frac{dQ}{dv}\frac{ds}{dv} - (1+s^2)\frac{dQ}{ds} - us\frac{dQ}{du}}{u^2\left(h^2 + 2\int \frac{dQ}{dv}\frac{dv}{u^2}\right)} = 0.$$

Les équations (1), (2), (3) sont celles qu'il s'agissait d'établir.

Nous croyons devoir faire connaître une dernière équation qui est utile dans quelques questions de Mécanique céleste.

Supposons que la fonction Q renferme d'autres variables que les coordonnées de m et représentons par dQ sa différentielle lorsque l'on fait varier seulement ces coordonnées.

L'équation des forces vives donne, en désignant par $\frac{1}{a}$ une constante,

$$(4) \qquad \frac{dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\cos^2\theta\, d\nu^2}{dt^2} - \frac{1}{a} = 2\int dQ.$$

Si l'on ajoute cette équation à l'équation (b) multipliée par r, on trouve

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{a} = 2\int dQ + r\frac{dQ}{dr}$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{d^2r^2}{dt^2} - \frac{1}{a} = 2\int dQ + r\frac{dQ}{dr}. \tag{5}$$

V.

SUR QUELQUES QUESTIONS D'ANALYSE.

16. Formules de Lagrange. — Soit

$$z = x + e f(z) \tag{1}$$

l'équation qui détermine une fonction z de x, f étant une fonction quelconque et e une constante supposée assez petite pour qu'on puisse développer z en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de e.

En distinguant par l'indice zéro les valeurs de z et de ses dérivées par rapport à e relatives à $e = 0$, on a

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{de}\right)_0 e + \frac{e^2}{1.2}\left(\frac{d^2 z}{de^2}\right) + \ldots + \frac{e^n}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n z}{de^n}\right) + \ldots; \tag{2}$$

or l'équation (1) donne par la différentiation

$$\frac{dz}{dx} = 1 + e f'(z)\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{de} = f(z) + e f'(z)\frac{dz}{de}, \tag{3}$$

d'où, par l'élimination de $f'(z)$,

$$\frac{dz}{de} = f(z)\frac{dz}{dx}. \tag{4}$$

De cette dernière équation on déduit

$$\frac{d^2 z}{de\,dx} = f'(z)\frac{dz^2}{dx^2} + f(z)\frac{d^2 z}{dx^2}. \tag{5}$$

Soit $\varphi(z)$ une fonction quelconque de z, on a

$$\frac{d\varphi(z)\frac{dz}{dx}}{de} = \varphi'(z)\frac{dz}{de}\frac{dz}{dx} + \varphi(z)\frac{d^2z}{de\,dx}$$

ou, par la substitution des valeurs (4) et (5),

$$\frac{d\varphi(z)\frac{dz}{dx}}{de} = \frac{d}{dx}\left[\varphi(z)f(z)\frac{dz}{dx}\right], \tag{6}$$

en remarquant que

$$\varphi'(z)f(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \varphi(z)f'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \varphi(z)f(z)\frac{d^2z}{dx^2}$$

n'est autre chose que la dérivée par rapport à x de $\varphi(z)f(z)\frac{dz}{dx}$.

En différentiant l'équation (4) par rapport à e, on obtient, en vertu de l'équation (6) où l'on fera $\varphi(z) = f(z)$,

$$\frac{d^2z}{de^2} = \frac{d}{de}\left[f(z)\frac{dz}{de}\right] = \frac{df(z)^2\frac{dz}{dx}}{dx},$$

et si l'on différentie de nouveau par rapport à e, en faisant $\varphi(z) = f(z)^2$ dans la formule (6),

$$\frac{d^3z}{de^3} = \frac{d}{dx}\frac{\left[df(z)^2\frac{dz}{dx}\right]}{de} = \frac{d^2f(z)^3\frac{dz}{dx}}{dx^2},$$

ainsi de suite, et en général

$$\frac{d^mz}{de^m} = \frac{d^{m-1}f(z)^m\frac{dz}{dx}}{dx^{m-1}};$$

mais, pour $e = 0$, on a $z = x$, $\frac{dz}{dx} = 1$, par suite

$$\left(\frac{d^mz}{de^m}\right)_0 = \frac{d^{m-1}[f(x)^m]}{dx^{m-1}}$$

et, enfin, le développement (2) de z sera

$$z = x + ef(x) + \frac{e^2}{1.2}\frac{df(x)^2}{dx} + \ldots + \frac{e^m}{1.2.3\ldots m}\frac{d^{m-1}f(x)^m}{dx^{m-1}} + \ldots. \tag{7}$$

Proposons-nous maintenant de trouver le développement d'une fonction quelconque $F(z)$ de la variable z définie par l'équation (1), suivant les puissances ascendantes de e; la formule de Maclaurin donne

$$F(z) = F(z)_0 + \left(\frac{dF}{de}\right)_0 e + \left(\frac{d^2F}{de^2}\right)_0 \frac{e^2}{1.2} + \ldots + \left(\frac{d^mF}{de^m}\right)_0 \frac{e^m}{1.2.3\ldots m} + \ldots;$$

mais on a, eu égard à la valeur (4),

$$\frac{dF}{de} = F'(z)\frac{dz}{de} = F'(z)f(z)\frac{dz}{dx},$$

d'où, en tenant compte de la relation (6),

$$\frac{d^2F}{de^2} = \frac{d}{de}\left[F'(z)f(z)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[F'(z)f(z)^2\frac{dz}{dx}\right].$$

Cette équation conduit de même à la suivante :

$$\frac{d^3F}{de^3} = \frac{d^2\left[F'(z)f(z)^3\frac{dz}{dx}\right]}{dx^2},$$

et l'on a en général

$$\frac{d^mF}{de^m} = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[F'(z) \quad (z)^m\frac{dz}{dx}\right],$$

d'où, en remarquant que $z = x$, $\frac{dz}{dx} = 1$ pour $e = 0$,

$$\left(\frac{d^mF}{de^m}\right)_0 = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[F'(x)f(x)^m].$$

Il vient donc, pour le développement cherché,

$$(8)\quad F(z) = F(x) + eF'(x)f(x) + \ldots + \frac{e^m}{1.2.3\ldots m}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[F'(x)f(x)^m] + \ldots.$$

17. Sur le développement en série trigonométrique de la fonction

$$(a'^2 - 2aa'\cos\theta + a^2)^{-\nu}.$$

Nous désignerons par E la base du système logarithmique népérien,

et nous poserons

$$\alpha = \frac{a}{a'}, \quad \beta = \mathrm{E}^{\theta\sqrt{-1}}, \quad \gamma = \mathrm{E}^{-\theta\sqrt{-1}};$$

comme nous avons

$$\cos\theta = \frac{\beta + \gamma}{2},$$

il vient

$$(a'^2 - 2aa'\cos\theta + a^2)^{-\nu} = a'^{-2\nu}(1 - \alpha\beta)^{-\nu}(1 - \alpha\gamma)^{-\nu}.$$

Puisque cette fonction est symétrique en a et a', on peut admettre que $\frac{a}{a'} = \alpha$ est plus petit que l'unité, car si a' était inférieur à a, il suffirait de faire permuter entre elles les lettres a et a'. Chacun des deux derniers facteurs de l'expression précédente est alors développable en série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de α, et nous avons

$$(1 - \alpha\beta)^{-\nu} = 1 + \nu\alpha\beta + \nu_1\alpha^2\beta^2 + \nu_2\alpha^3\beta^3 + \ldots,$$
$$(1 - \alpha\gamma)^{-\nu} = 1 + \nu\alpha\gamma + \nu_1\alpha^2\gamma^2 + \nu_2\alpha^3\gamma^3 + \ldots,$$

en posant

$$\nu_1 = \frac{\nu(\nu+1)}{1.2}, \quad \nu_2 = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3}, \quad \ldots$$

Si l'on remarque que $\beta\gamma = 1$, il vient

$$\begin{aligned}(1 - \alpha\beta)^{-\nu}(1 - \alpha\gamma)^{-\nu} = 1 &+ \alpha\nu(\beta + \gamma) + \alpha^2[\nu_1(\beta^2 + \gamma^2) + \nu^2] \\ &+ \alpha^3[\nu_2(\beta^3 + \gamma^3) + \nu\nu_1(\beta + \gamma)] \\ &+ \alpha^4[\nu_3(\beta^4 + \gamma^4) + \nu_1^2 + \nu\nu_2(\beta^2 + \gamma^2)];\end{aligned}$$

comme on a en général

$$\beta^i + \gamma^i = 2\cos i\theta,$$

le produit ci-dessus, par suite la fonction proposée, s'exprimera par une série de termes proportionnels aux cosinus des multiples successifs de θ, et si nous posons

$$(a) \quad \begin{cases} \mathrm{P}_0 = a'^{-2\nu}(1 + \nu^2\alpha^2 + \nu_1^2\alpha^4 + \nu_2^2\alpha^6 + \ldots), \\ \mathrm{P}_1 = 2a'^{-2\nu}(\nu\alpha + \nu\nu_1\alpha^3 + \nu_1\nu_2\alpha^5 + \ldots), \\ \mathrm{P}_2 = 3a'^{-2\nu}(\nu_1\alpha^2 + \nu\nu_2\alpha^4 + \nu_1\nu_3\alpha^6 + \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

nous aurons, pour le développement cherché,

$$(b)\quad (a'^2 - 2aa'\cos\theta + a^2)^{-\nu} = P_0 + P_1\cos\theta + P_2\cos 2\theta + \ldots = \sum_0^\infty P_i \cos i\theta.$$

Il suffit de calculer directement les coefficients P_0 et P_1 au moyen des formules (a), car les autres P_i peuvent s'en déduire successivement. En effet, si l'on différentie l'équation (b) par rapport à θ, on trouve

$$2aa'\nu\sin\theta(a'^2 - 2aa'\cos\theta + a^2)^{-\nu} = (a'^2 - 2aa'\cos\theta + a^2)\sum_0^\infty i P_i \sin i\theta$$

ou

$$2aa'\nu\sin\theta\sum_0^\infty P_i\cos i\theta = (a'^2 - 2aa'\cos\theta + a^2)\sum_0^\infty i P_i \sin i\theta$$

ou encore

$$aa'\nu\sum_0^\infty P_i[\sin(i+1)\theta - \sin(i-1)\theta]$$

$$= (a'^2 + a^2)\sum_0^\infty i P_i \sin i\theta - aa'\sum_0^\infty i P_i[\sin(i+1)\theta + \sin(i-1)i\theta].$$

Si l'on identifie les coefficients de $\sin(i-1)\theta$ dans les deux membres de cette équation, on trouve

$$(c)\qquad P_i = \frac{(i-1)(a'^2 + a^2)P_{i-1} - (i+\nu-2)aa'P_{i-2}}{(i-\nu)aa'},$$

formule au moyen de laquelle on calculera le coefficient P_i au moyen des deux précédents et, par suite, tous les coefficients P_3, P_4, ... de proche en proche, lorsqu'on connaîtra P_0 et P_1. Elle serait en défaut, en particulier du moins, si ν était un nombre entier positif; mais, comme ce cas ne se présentera pas dans les questions que nous avons à étudier, nous ne nous en occuperons pas.

18. Représentons par Q ce que devient P, lorsqu'on remplace ν par $\nu+1$, ou posons

$$(a'^2 - 2aa'\cos\theta + a^2)^{-(\nu+1)} = \sum_0^\infty Q_i \cos i\theta.$$

Au lieu de calculer directement les coefficients Q, on peut les déduire des coefficients P si ces derniers sont connus. En effet, en multipliant l'égalité précédente par

$$(a'^2 - 2aa'\cos\theta + a^2)$$

et ayant égard à l'équation (b), on trouve

$$\sum_0^\infty P_i \cos i\theta = (a'^2 - 2aa'\cos\theta + a^2)\sum_0^\infty Q_i \cos i\theta$$

$$= (a'^2 + a^2)\sum_0^\infty Q_i \cos i\theta - aa'\sum_0^\infty Q_i[\cos(i+1)\theta + \cos(i-1)\theta];$$

d'où, en identifiant de part et d'autre les coefficients de $\cos i\theta$,

$$P_i = (a'^2 + a^2)Q_i - aa'Q_{i-1} - aa'Q_{i+1};$$

mais de l'équation (c) on tire, en y changeant i en $i+1$, ν en $\nu+1$ et P en Q,

$$Q_{i+1} = \frac{i(a'^2 + a^2)Q_i - (i+\nu)aa'Q_{i-1}}{(i-\nu)aa'},$$

et l'on a, par suite,

$$P_i = \frac{2\nu aa'Q_{i-1} - \nu(a'^2 + a^2)Q_i}{i-\nu}$$

et de même

$$P_{i+1} = \frac{2\nu aa'Q_i - \nu(a'^2 + a^2)Q_{i+1}}{i-\nu+1}.$$

Si, par la méthode des coefficients indéterminés, on élimine Q_{i-1} et Q_{i+1} entre les trois dernières des équations que nous venons d'établir, on trouve

$$(d) \qquad Q_i = \frac{(i+\nu)(a'^2 + a^2)P_i - 2(i-\nu+1)aa'P_{i+1}}{\nu(a'^2 - a^2)^2}.$$

Si, dans cette expression, on remplace P_{i+1} par sa valeur déduite de l'équation (c), elle prend la forme suivante :

$$(e) \qquad Q_i = \frac{(\nu-i)(a'^2 + a^2)P_i + 2(i+\nu-1)aa'P_{i-1}}{\nu(a'^2 - a^2)^2}.$$

19. Les dérivées successives par rapport à a de la fonction P_i peuvent s'exprimer au moyen de fonctions de cette nature. En effet, en différentiant l'équation (b) par rapport à a, on trouve

$$-2\nu(a-a'\cos\theta)(a'^2-2aa'\cos\theta+a^2)^{-(\nu+1)}=\sum_0^\infty \frac{dP_i}{da}\cos i\theta$$

ou

$$(a'^2-2aa'\cos\theta+a^2)^{-\nu}-(a'^2-a^2)(a'^2-2aa'\cos\theta+a^2)^{-(\nu+1)}$$
$$=-\frac{a}{\nu}\sum_0^\infty \frac{dP_i}{da}\cos i\theta,$$

ou encore

$$\sum_0^\infty P_i\cos i\theta-(a'^2-a^2)\sum_0^\infty Q_i\cos i\theta=-\frac{a}{\nu}\sum_0^\infty \frac{dP_i}{da}\cos i\theta$$

et, en identifiant les termes semblables,

$$\frac{dP_i}{da}=\frac{\nu(a'^2-a^2)}{a}Q_i-\frac{\nu}{a}P_i.$$

Enfin, si dans cette équation on remplace Q_i par sa valeur (d) ou (e), il vient

$$(f)\qquad \frac{dP_i}{da}=\frac{ia'^2+(i+2\nu)a^2}{a(a'^2-a^2)}P_i-\frac{2(i-\nu+1)a'}{a'^2-a^2}P_{i+1},$$

$$(g)\qquad \frac{dP_i}{da}=\frac{2\nu a^2-i(a^2+a'^2)}{a(a'^2-a^2)}P_i+\frac{2(i+\nu-1)a'}{a'^2-a^2}P_{i-1}.$$

On obtiendra $\frac{d^2P_i}{da^2}$ en différentiant l'équation (g) par rapport à a et remplaçant, dans le résultat obtenu, $\frac{dP_i}{da}$, $\frac{dP_{i-1}}{da}$ par leurs valeurs déduites de la même équation, et ainsi de suite pour $\frac{d^3P_i}{da^3}$, ...

20. Comme a et a' doivent entrer de la même manière dans la fonction P_i, cette fonction est homogène en a et a' et du degré 2ν, et

l'on a

$$a\frac{dP_i}{da}+a'\frac{dP_i}{da'}=-2\nu P_i, \tag{h}$$

d'où l'on déduira $\frac{dP_i}{da'}$, et par des différentiations successives, $\frac{d^2P_i}{da\,da'}$, $\frac{d^2P}{da'^2}$, ...

21. Sur deux cas particuliers dans lesquels on peut donner une forme trigonométrique à l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{my}{x^2}+q^2y=0\ (^1), \tag{1}$$

dans laquelle m et q sont deux quantités réelles. — En substituant dans cette équation l'expression

$$y=u\sin qx+v\cos qx,$$

où u et v sont deux fonctions inconnues de x, et égalant à zéro les coefficients des termes $\sin qx$ et $\cos qx$ du résultat obtenu, nous obtiendrons

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dx^2}-2q\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{mu}{x^2}=0,\\[2ex] \dfrac{d^2v}{dx^2}+2q\dfrac{du}{dx}+\dfrac{mv}{x^2}=0.\end{cases} \tag{2}$$

Nous allons chercher à satisfaire à ces équations par les expressions

$$u=N+\frac{P}{x^2},\qquad v=\frac{Q}{x},$$

dans lesquelles N, P, Q sont des constantes. En identifiant les termes

---

(1) Dans le cas où $m<\frac{1}{4}$ et en posant $k=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-m}$, $y=ux^k$, on est ramené à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2k}{x}\frac{du}{dx}+q^2u=0,$$

que l'on sait indiquer par séries ou au moyen d'intégrales définies.

semblables dans les résultats obtenus, on arrive aux relations

$$(3)\qquad P(6+m)=0,\quad 2qQ+mN=0,\quad 2Q-4qP+mQ=0,$$

dont la première exige que l'on ait $6+m=0$ ou $P=0$. Nous avons donc deux cas à distinguer :

1° En supposant $m=-6$, nous avons

$$Q=\frac{3N}{q},\quad P=-\frac{3N}{q^2};$$

par suite,

$$u=N\left(1-\frac{3}{q^2x^2}\right),\quad v=\frac{3N}{qx}.$$

Mais, si nous remarquons que, d'après les équations (2), les fonctions u et v ne diffèrent l'une de l'autre que par le changement de signe de q, nous aurons aussi, en désignant par N′ une constante arbitraire, cette autre solution

$$v=N'\left(1-\frac{3}{q^2x^2}\right),\quad u=-\frac{3N'}{qx};$$

d'où il suit que

$$(4)\qquad \begin{cases} y=N\left[\left(1-\dfrac{3}{q^2x^2}\right)\sin qx+\dfrac{3}{qx}\cos qx\right] \\ \quad +N'\left[\left(1-\dfrac{3}{qx^2}\right)\cos qx-\dfrac{3}{qx}\sin qx\right] \end{cases}$$

est l'intégrale complète de l'équation

$$(1')\qquad \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{6y}{x^2}+q^2y=0.$$

2° Admettons maintenant que m soit différent de -6, nous avons

$$P=0,\quad m=-2,\quad Q=\frac{N}{q},$$

et l'on voit facilement que

$$(4')\qquad y=N\left(\sin qx+\frac{1}{qx}\cos x\right)+N'\left(\cos qx-\frac{1}{qx}\sin qx\right)$$

est l'intégrale complète de l'équation

$$(1'') \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{y}{x^2} + q^2 y = 0.$$

22. Solution trigonométrique de l'équation $\operatorname{tang} y = m \operatorname{tang} x$, dans laquelle m est une constante donnée. — En ayant recours aux imaginaires, on déduit successivement de cette équation, en désignant par e la base de logarithmes népériens et en posant $i = \sqrt{-1}$,

$$\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{e^{iy} + e^{iy}} = m\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}},$$

$$\frac{e^{2iy} - 1}{e^{2iy} + 1} = m\frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1},$$

$$(a) \qquad e^{2iy} = \frac{(1+m)e^{2ix} + 1 - m}{(1-m)e^{2ix} + 1 + m}.$$

Nous avons maintenant deux cas à distinguer :

1° $m < 1$. — Nous pouvons poser $m = \cos\varphi$, et l'équation (a) devient

$$e^{2iy} = e^{2ix}\frac{1 + e^{-2ix}\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}}{1 + e^{2ix}\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}}$$

et, en prenant les logarithmes,

$$y = x + \frac{1}{2i}\left[\log\left(1 + e^{-2ix}\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}\right) - \log\left(1 + e^{2ix}\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Si l'on développe en série les logarithmes de cette expression et que l'on substitue aux imaginaires leurs équivalentes en lignes trigonométriques, on trouve

$$(9) \qquad y = x - \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4\frac{\varphi}{2}\sin 4x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^6\varphi\sin 6x + \ldots;$$

2° $m > 1$. — En posant $m = \frac{1}{\cos\varphi}$ et en suivant la même marche

que ci-dessus, on arrive à ce résultat,

$$(10) \qquad y = x + \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4\frac{\varphi}{2}\sin 4x + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^6\varphi\sin 6x + \ldots.$$

23. Sur l'intégration de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = X.$$

Dans cette équation, a est une constante réelle et X une fonction de x.

Si, en considérant u comme une fonction de x, on pose

$$y = u\cos ax,$$

on trouve, en substituant cette expression dans l'équation (1)

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2a\frac{\sin ax}{\cos ax}\frac{du}{dx} - \frac{X}{\cos ax} = 0,$$

équation linéaire en $\frac{du}{dx}$ dont l'intégrale est, abstraction faite de la constante arbitraire,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 ax}\int X\cos ax\,dx,$$

d'où, en intégrant par parties,

$$u = \frac{1}{a}\int d\operatorname{tang} ax \int X\cos ax\,dx = \frac{1}{a}\left(\operatorname{tang} ax\int X\cos ax\,dx - \int X\sin ax\,dx\right).$$

L'équation proposée sera donc satisfaite par

$$(2) \qquad y_1 = \frac{1}{a}\left(\sin ax\int X\cos ax\,dx - \cos ax\int X\sin ax\,dx\right).$$

Pour avoir l'intégrale complète de cette équation, il suffira d'ajouter à cette valeur l'intégrale de la même équation sans second membre, ou

$$C\sin ax + C'\cos ax,$$

en désignant par C, C′ deux constantes arbitraires.

Si l'on a

$$X = k\cos(mx + \varepsilon), \tag{3}$$

k, m, ε étant des constantes, l'intégrale particulière y_1 deviendra, sans avoir recours à la formule (2),

$$y_1 = k\frac{\cos(mx + \varepsilon)}{a^2 - m^2}. \tag{4}$$

Cette formule est en défaut si $m = a$, mais il est alors facile de s'assurer que l'équation (1) est satisfaite par

$$y_1 = \frac{k}{2a}x\sin(ax + \varepsilon). \tag{4'}$$

Cette valeur peut d'ailleurs se déduire de la valeur (4) en négligeant le carré de $m - a = \delta$, ce qui donne

$$y_1 = -k\frac{\cos(ax + \varepsilon)}{2a\delta} + \frac{k}{2a}x\sin(ax + \varepsilon).$$

Comme il n'y a pas lieu de tenir compte du premier terme de cette expression qui satisfait à l'équation (1) sans second membre, on retombe sur la formule (4').

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

CHAPITRE I.

PREMIÈRE APPROXIMATION DU MOUVEMENT DES PLANÈTES.

---

§ I. — Du mouvement elliptique des planètes.

1. Lois de Kepler. — Accélération du centre des planètes. — Les planètes, dans leur mouvement autour du Soleil, obéissent aux lois suivantes, que Kepler (1) a déduites de l'observation :

Première loi. — *Le centre de chaque planète parcourt, dans un plan passant par celui du Soleil et autour de ce dernier centre, une orbite dans laquelle le rayon vecteur qui joint les centres des deux astres décrit des aires proportionnelles au temps.*

Deuxième loi. — *La courbe décrite par le centre d'une planète est une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.*

Troisième loi. — *Les carrés des durées des révolutions des planètes autour du Soleil sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.*

Nous rappellerons que le point de l'orbite le plus rapproché du Soleil se nomme le *périhélie* et le point le plus éloigné l'*aphélie*.

---

(1) Johann Keppler, né dans le Wurtemberg en 1571, mort à Ratisbonne en 1630.

On déduit d'abord de la première loi et du principe des aires en Mécanique que *la direction de l'accélération du centre de chaque planète passe par le centre du Soleil.*

Soient, à un instant quelconque,

r la distance du centre m d'une planète à celui M du Soleil;

v l'angle formé par r avec une droite fixe Mx passant par le point M et comprise dans le plan de l'orbite; cet angle est appelé l'*anomalie vraie de la planète;*

a le demi-grand axe de l'orbite ou la *distance moyenne de la planète au Soleil,* dont la direction est ce que l'on nomme la *ligne des absides;*

e l'excentricité relative de l'orbite;

ω l'angle formé par la ligne des absides avec Mx ou la *longitude du périhélie;*

T la durée de la révolution complète de la planète;

φ l'accélération du centre de la planète considérée comme positive ou négative, selon qu'elle sera dirigée vers le centre du Soleil ou en sens inverse;

k le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps.

On a

$$kT = 2\pi a^2\sqrt{1-e^2} \tag{1}$$

et, d'après la première loi de Kepler,

$$r^2\,dv = k\,dt. \tag{2}$$

Le carré de l'élément de chemin parcouru dans le temps dt étant $r^2\,dv^2 + dr^2$, le principe des forces vives donne, en désignant par h une constante,

$$\frac{r^2\,dv^2 + dr^2}{dt^2} = 2h - 2\int \varphi\,dr \tag{3}$$

ou, en éliminant dt au moyen de l'équation (2),

$$k^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dv}\right)^2\right] = h - 2\int \varphi\,dr; \tag{4}$$

or l'ellipse décrite a pour équation

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(v - \omega)}{a(1 - e^2)}; \tag{5}$$

en exprimant, par suite, $\left(d\frac{1}{r}\right)^2$ au moyen de r et réduisant, l'équation (4) devient

$$\frac{2k}{a(1-e^2)}\frac{1}{r} = \frac{k}{a^2(1-e^2)} + 2h - 2\int \varphi\, dr,$$

d'où, par la différentiation,

$$\varphi = \frac{k^2}{a(1-e^2)}\frac{1}{r^2}, \tag{6}$$

et, comme e est plus petit que l'unité, cette valeur est positive. Donc :

Dans son mouvement elliptique autour du Soleil, le centre de chaque planète obéit à une accélération dirigée vers le centre du Soleil et qui varie en raison inverse du carré de la distance des centres des deux astres.

En remplaçant dans la formule (6) la constante k par sa valeur tirée de l'équation (1), on trouve

$$\varphi = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}\frac{1}{r^2}, \tag{7}$$

expression dans laquelle, d'après la troisième loi de Kepler, le coefficient de $\frac{1}{r^2}$ est constant; par suite :

L'accélération planétaire, rapportée à l'unité de distance, a la même valeur pour toutes les planètes.

Supposons que, la position du foyer M restant invariable, sa distance D au sommet correspondant reste constante en grandeur et en direction; admettons de plus que a croisse indéfiniment, l'ellipse deviendra à la limite une parabole et $a(1-e^2)$ aura 2D pour valeur; la formule (6)

---

[1] On trouvera, dans le t. I de notre *Traité de Mécanique générale*, une démonstration géométrique de ce théorème.

se transformera, par suite, dans la suivante :

$$\varphi = \frac{k^2}{2D}\frac{1}{r^2}, \tag{8}$$

qui nous sera utile plus loin.

La formule (6) est aussi applicable au cas théorique où l'orbite serait hyperbolique; mais alors l'accélération φ deviendrait négative, ou répulsive, si l'on peut s'exprimer ainsi.

2. Supposons que, réciproquement, l'accélération d'un point mobile soit dirigée vers un centre fixe M et varie en raison du carré de la distance à ce centre, et proposons-nous de déterminer la nature de la trajectoire de ce point, courbe qui sera évidemment plane, car deux vitesses consécutives se trouvent dans le même plan.

Posons à cet effet $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$, μ étant une constante; l'équation (4) devient

$$k^2\left\{\frac{1}{r^2} + \left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dv}\right]^2\right\} = h + \frac{2\mu}{r},$$

d'où

$$dv = \frac{\pm d\frac{1}{r}}{\sqrt{-\frac{1}{r^2} + \frac{2\mu}{k^2 r} + \frac{h}{k^2}}}.$$

En convenant de considérer dv comme positif, on devra prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que r décroîtra ou croîtra; les changements de signes auront lieu pour les valeurs maximum et minimum de r données par

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dv} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu}{k^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{k^2} + \frac{h}{k^2}}.$$

Si nous supposons que r commence à croître à partir de la position initiale du mobile, on devra prendre le signe inférieur dans l'équation ci-dessus, qui, après avoir effectué l'intégration, donnera

$$v - \omega = \arccos \frac{\frac{k^2}{r} - \mu}{\sqrt{\mu^2 + hk^2}},$$

en désignant par ω une constante. On déduit de là

$$r = \frac{\frac{k^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{hk^2}{\mu^2}} \cos(v - \omega)}, \tag{9}$$

équation polaire d'une section conique rapportée à l'un de ses foyers. Cette courbe sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que l'on aura

$$h \lessgtr 0. \tag{a}$$

Si nous désignons par w_0, r_0 la vitesse et le rayon vecteur du mobile à l'instant initial, on a, en vertu de la formule (3),

$$2h = w_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$$

et, au lieu de (a),

$$w_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} \lessgtr 0.$$

On voit ainsi que la nature de la courbe dépend seulement de la vitesse initiale et non de sa direction.

De la comparaison entre les équations (5) et (9) on déduit, dans le cas d'un mouvement elliptique,

$$\begin{cases} k = \sqrt{a(1 - e^2)\mu}, \\ h = -\dfrac{\mu}{a}; \end{cases} \tag{10}$$

et, en désignant par w la vitesse du mobile au bout du temps t, le principe des forces vives ou l'équation (3) donne

$$w^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}. \tag{11}$$

3. Principe de la gravitation universelle. — Soient

M la masse du Soleil;

m, m', m'', ... celles des planètes;

r, r', r'', ... les distances de leurs centres à celui du Soleil.

Les dimensions du Soleil étant très petites par rapport à leurs distances mutuelles, on peut, dans une première approximation, en faire abstraction et supposer que ces astres sont réduits à l'état de points matériels. Nous dirons donc que la masse M d'un point matériel exerce sur les masses m, m', m'', ... les forces attractives $\alpha\frac{m}{r^2}$, $\alpha\frac{m'}{r'^2}$, ..., en désignant par α une constante indépendante de m, m', m'', ...

Si l'on considère cette attraction comme inhérente à l'essence même de la matière, il faut admettre que, inversement, les masses m, m', m'' attirent de la même manière la masse M et avec une énergie égale et contraire à celles des forces précédentes, d'après le principe de l'égalité entre l'action et la réaction. Par analogie avec ce qui précède, l'attraction de m sur M sera de la forme $\alpha'\frac{M}{r^2}$, le coefficient α' ne pouvant dépendre que de m, et, comme $\alpha'\frac{M}{r^2} = \alpha\frac{m}{r^2}$ et que α est indépendant de m, il faut que l'on ait $\alpha' = fm$, $\alpha = fM$, f étant une constante indépendante des masses attirantes et de leurs distances. On est donc conduit à admettre que :

Deux particules matérielles s'attirent mutuellement suivant la droite qui les joint, proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance (1).

---

(1) Ces actions ne sont pas les seules qui s'exercent entre les éléments de la matière ; il en existe d'autres appelées spécialement *actions moléculaires*, dont l'intensité, très considérable à des distances extrêmement faibles, décroît avec une grande rapidité quand les distances augmentent. Ces forces, auxquelles sont dues la cohésion, l'élasticité des solides, etc., sont les unes attractives, inhérentes à l'essence même de la matière, les autres répulsives, dues au calorique. Mais les forces de ces deux systèmes, dont les relations de grandeur définissent les trois états d'un corps, n'étant appréciables qu'entre les particules d'un même corps, ne jouent aucun rôle dans les phénomènes astronomiques. En ce qui concerne l'équilibre et le mouvement des corps solides ou fluides, elles ne sont représentées que par des résultantes fictives auxquelles on donne le nom de *pression*.

L'attraction proportionnelle à l'inverse du carré de la distance, due à la gravitation, est très petite entre les corps de faible masse, tels que nous les observons à la surface de la Terre. Cependant elle est mise en évidence par l'attraction des montagnes sur le fil à plomb et dans l'expérience de Cavendish, répétée par M. Cornu, pour la détermination de la densité moyenne de la Terre. Mais, lorsque deux corps en présence offrent chacun, ou seulement l'un d'eux, une masse considérable, cette attraction se traduit, même à de grandes distances, par des phénomènes parfaitement caractérisés et qui de tout temps ont frappé les yeux des observateurs.

Tel est le principe de la *gravitation universelle* dû à Newton (1), basé, comme tous les principes élémentaires de la Physique, sur une extension théorique d'une loi observée. Nous avons supposé, en effet, que le Soleil et les planètes sont des points matériels, tandis qu'ils ont des dimensions appréciables, quoique très petites par rapport à leurs distances mutuelles, et qu'ils sont composés d'un très grand nombre de ces points qui devraient exercer entre eux, de l'un à l'autre corps, des attractions suivant la loi ci-dessus énoncée. Or nous verrons plus loin que, en raison de la presque sphéricité de ces astres et de leur grand éloignement, les résultantes de ces attractions élémentaires produisent, à très peu près, le même effet que si les masses de ces astres étaient concentrées en leurs centres de gravité respectifs. Le principe de la gravitation de Newton se trouve donc complètement d'accord avec le phénomène plus complexe en lui-même observé par Kepler et auquel ce principe doit son origine.

Nous dirons donc que tous les corps célestes s'attirent mutuellement proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance.

En raison de leur grand éloignement du système solaire, les étoiles fixes n'exercent aucune action appréciable sur les éléments de ce système, lesquels ne sont ainsi soumis qu'à leurs actions mutuelles : d'où il suit que le centre de gravité du système ne peut être animé que d'un mouvement rectiligne et uniforme. Ce mouvement de translation du système dans les espaces célestes est accusé par l'observation, malgré son extrême lenteur.

Les attractions auxquelles est soumise une planète de la part des autres éléments du système solaire, non compris le Soleil, produisent dans son mouvement elliptique des modifications ou *perturbations*, mais dont nous n'avons pas à nous occuper quant à présent.

Si nous ne considérons qu'une seule planète en présence du Soleil, en faisant abstraction de tous les autres corps du système solaire, l'accélération du Soleil $\frac{fm}{r^2}$ sera dirigée de M vers m; celle $\frac{fM}{r^2}$ sera dirigée en sens inverse ou de m vers M. En supposant que l'on imprime aux

(1) Né en 1642, mort en 1727. Il a vécu ainsi un siècle environ après Kepler.

deux masses une vitesse et une accélération égales et contraires à celles du Soleil ramené ainsi au repos, l'accélération de la planète dans son mouvement relatif par rapport au Soleil sera, par suite, $\frac{f}{r^2}(M+m)$, et comme, d'autre part, elle est représentée par l'expression (7) ou, d'après le n° 2, par $\frac{\mu}{r^2}$, il vient

$$f(M+m)=\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}=\mu. \tag{12}$$

D'après la troisième loi de Kepler, cette quantité devrait être indépendante de m; d'où il suit que cette loi n'est qu'approximative et que $\frac{m}{M}$, ou le rapport de la masse d'une planète à celle du Soleil, est dans tous les cas une très petite fraction.

En Mécanique céleste, on prend, pour unité de masse, la masse du Soleil, et, pour unité de force, l'attraction entre deux masses égales à l'unité situées à l'unité de distance; ce qui revient à supposer $\mu=1$, en négligeant $\frac{m}{M}$ devant l'unité, et $f=1$.

Ces conventions offrent l'inconvénient de supprimer l'homogénéité des formules, mais autant les admettre immédiatement que plus tard; nous y gagnerons au point de vue de la simplicité. Il en résulte que les unités de longueur et du temps sont dépendantes l'une de l'autre, car nous avons

$$a=\sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2}}.$$

Si donc nous choisissons une certaine unité pour le temps, et si, dans nos calculs subséquents, nous introduisons une distance l dont le rapport à a serait n, cette distance l, dans les calculs numériques, devra être remplacée par

$$n\sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2}}.$$

Avant d'être parvenu à une démonstration générale de la loi de la gravitation, Newton avait entrevu l'énoncé de cette loi par les considérations suivantes.

Les planètes décrivant des orbites d'excentricités différentes, on

peut admettre que les lois de Kepler s'appliquent encore au cas d'une orbite circulaire, et cela avec d'autant plus de raison que ces excentricités sont généralement petites (¹). Dans cette hypothèse, appelons

φ, φ' les accélérations qui retiennent deux planètes dans leurs orbites;
T, T′ les durées de leurs révolutions autour du Soleil;
R, R′ les rayons de ces orbites;

on a, d'après l'expression connue de l'accélération centripète,

$$\varphi = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R, \quad \varphi' = \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 R',$$

d'où

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{R}{R'}\,\frac{T'^2}{T^2},$$

et, d'après la troisième loi de Kepler,

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{R'^2}{R^2},$$

ce qui est conforme au résultat déduit de la considération du mouvement elliptique.

4. De la pesanteur terrestre. — Si l'on fait abstraction de la force centrifuge, très faible d'ailleurs, due à la rotation de la Terre, le poids d'un corps à sa surface n'est autre chose que la résultante des attractions exercées pour toutes les molécules du sphéroïde terrestre sur chacun des points matériels du corps, résultante qui ne dépend que de la masse de ce corps et de sa distance au centre du globe, conformément à ce que l'expérience nous enseigne. Et en effet, on a reconnu, à la suite d'observations faites à différentes hauteurs, que

(¹) Sous le rapport des excentricités des orbites, les planètes peuvent se classer ainsi qu'il suit :

1° Deux entre la *Terre* ($e = 0{,}017$) et *Uranus* (0,047), savoir *Concordia* (0,041) et *Harmonia* (0,046);

2° Neuf entre *Saturne* (0,056) et *Mars* (0,093). Leurs excentricités sont comprises entre celles 0,066 de *Nemausa* et 0,090 de *Vesta;*

3° Quarante-quatre entre *Mars* et *Mercure* (0,203), dont les excentricités ont pour limites 0,0976 (*Parthénope*) et 0,202 (*Hébé*);

4° Enfin seize qui ont des excentricités supérieures à celles de *Mercure* et comprises entre les limites 0,209 (*Isis*) et 0,338 (*Polymnie*). Celle qui a la plus forte excentricité après *Polymnie* est *Atalante* (0,298).

l'accélération de la gravité terrestre diminue à mesure que l'on s'élève au-dessus de la surface de la Terre.

5. Des satellites. — Les satellites d'une planète circulent autour de cette dernière, en vertu de la gravitation, et leurs orbites sont elliptiques, à quelques inégalités près dues à leurs attractions mutuelles, à celles du Soleil et des autres planètes.

Le mouvement de la Lune autour de la Terre a permis à Newton, à l'aide des considérations suivantes, de vérifier la loi de la gravitation.

L'orbite lunaire est très sensiblement circulaire, et son rayon est égal, à très peu près, à 60 fois le rayon moyen de la Terre; de plus, le centre de la Lune décrit, en une minute, un arc de 61020^{m}, dont le sinus verse, $4^{m},87$, représente la distance dont ce centre s'écarte de la tangente menée à l'origine de l'arc, distance qui peut être considérée comme ayant été parcourue d'un mouvement uniformément varié. On a donc, en désignant par φ' l'accélération qui se rapporte à ce mouvement,

$$4^{m},87 = \varphi' \frac{(60^{s})^{2}}{2};$$

or la distance, $4^{m},87$, est très sensiblement égale à la moitié, $4^{m},9044$, de l'accélération g de la pesanteur à la surface de la Terre; on a donc à peu près

$$\frac{g}{\varphi'} = \frac{60^{2}}{1},$$

c'est-à-dire que g et φ' sont en raison inverse des carrés des distances au centre de la Terre.

On arrive également à ce résultat en remarquant que, d'après le n° 3, on a

$$\varphi' = \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^{2} R',$$

d'où

$$\frac{\varphi'}{g} = \frac{2\pi . 2\pi R'}{T'^{2} g}.$$

Or la Lune fait une révolution autour de la Terre dans $27^{j},322$; on a donc ainsi

$$T' = 39344 \times 60^{s}$$

et, de plus,

$$2\pi R' = 40\,000\,000^{m} \times 60, \quad g = 9^{m},809;$$

par les substitutions de ces valeurs, le rapport ci-dessus devient

$$\frac{\varphi'}{g} = \frac{1}{3624},$$

soit $(\frac{1}{60})^2$ environ.

6. Généralités sur les masses des planètes. — Masse de Jupiter. — Soient

m' la masse d'un satellite circulant autour d'une planète dont la masse est représentée par m;

$2a'$ le grand axe de son orbite;

T' la durée d'une révolution.

La formule (12), appliquée à cette planète et à son satellite, donne, en nous rappelant que nous devons supposer $f = 1$,

$$m + m' = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2},$$

d'où, en divisant par cette même équation, où l'on doit prendre égale à l'unité la masse M du Soleil,

$$\frac{m + m'}{1 + m} = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2},$$

et, comme les fractions m, $\frac{m'}{m}$ sont généralement petites, on a, par approximation,

$$m = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2}.$$

Les rapports $\frac{a'}{a}$, $\frac{T'}{T}$ étant supposés donnés par l'observation, cette dernière formule fera connaître la masse de la planète rapportée à celle du Soleil. C'est ainsi que Newton a trouvé $\frac{1}{1067}$ pour Jupiter, résultat qui diffère peu de la fraction $\frac{1}{1050}$ obtenue depuis par des procédés modernes et plus précis.

7. Masse de la Terre. — La masse de la Terre ne peut pas se dé-

terminer par la méthode précédente, attendu que l'inverse de son rapport à celle de la Lune n'est plus négligeable vis-à-vis de l'unité. On opère alors de la manière suivante.

Nous verrons plus loin, en nous occupant de la forme des planètes, que, pour tous les points du parallèle dont le sinus de la latitude (35°, 14′) est $\sqrt{\frac{1}{3}}$, l'attraction exercée par la Terre sur un corps qui lui est extérieur est la même que si la Terre était sphérique. Pour ce parallèle, le rayon de la Terre est $r = 6364551^{m}$, et l'accélération apparente de la pesanteur $9^{m},79886$; mais, avant d'égaler cette accélération à celle G qui est due à l'attraction terrestre, il faut l'augmenter dans la proportion de $\frac{2}{3}\frac{1}{289}$ pour tenir compte de la composante verticale de l'accélération centrifuge aux différents points du même parallèle. On a ainsi

$$G = \frac{m}{r^2} = 9^{m},81645.$$

Mais l'équation (12) nous donne, en y faisant $f = 1$, $M = 1$ et négligeant m devant l'unité,

$$1 = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2},$$

d'où, par division,

$$m = \frac{9,81645}{r} \frac{T^2}{4\pi^2} \left(\frac{r}{a}\right)^3;$$

mais on a en secondes

$$T = 86400 \times (365^{j},256374)$$

et, pour la parallaxe du Soleil correspondant au parallèle ci-dessus,

$$\frac{r}{a} = \operatorname{tang} 8'',60,$$

d'où

$$\frac{a}{r} = 29984;$$

par suite,

$$m = \frac{1}{354592}.$$

Le diamètre du Soleil étant égal à 112 fois celui de la Terre, on déduit de cette relation que le rapport de sa densité moyenne à celle de

la Terre est

$$\frac{354592}{112^3} = 0,252,$$

soit $\frac{1}{4}$ environ.

En appelant R le rayon du Soleil, on a, pour l'accélération de la gravité à sa surface,

$$G' = \frac{1}{R^2}$$

ou, à cause de $R = 112r$, $G = \frac{m}{r^2}$,

$$G' = \frac{G}{(112)^2 m} = 28,27\,G.$$

La correction que l'on devrait faire subir à cette valeur pour tenir compte de l'accélération centrifuge due au mouvement de rotation du Soleil autour de son axe peut être négligée; car, le Soleil exécutant sur lui-même une révolution en $25^j,5$ environ, le rapport de l'accélération centrifuge à son équateur à l'accélération pareille à l'équateur de la Terre est seulement de

$$\frac{112}{(25,5)^2} = 0,172,$$

soit un peu plus de $\frac{1}{6}$.

8. Masse de la Lune. — Pour déterminer cette masse, on part du principe suivant, dont nous démontrerons l'exactitude dans un autre Chapitre : Pour un point de la surface de la mer, dont le rayon vecteur, partant du centre de la Terre, fait le même angle avec les rayons vecteurs menés aux centres de la Lune et du Soleil, les actions de ces deux astres qui produisent les oscillations de la mer sont entre elles comme leurs masses divisées par le cube de leurs distances au centre de la Terre, et, toutes choses égales d'ailleurs, les amplitudes de ces oscillations sont proportionnelles aux forces qui les produisent. Si donc on appelle

m, m' les masses de la Terre et de la Lune;

a, a' les distances des centres de la Terre et du Soleil et de la Terre et de la Lune;

ν le rapport de la marée lunaire à la marée solaire pour des positions semblables des deux astres,

on aura

$$\frac{m'}{a'^3} = \frac{\nu}{a^3},$$

ou

$$\frac{m'}{m} = \nu \frac{a'^3}{a^3} \frac{1}{m}.$$

Un grand nombre d'observations, faites dans le port de Brest, ont donné pour moyenne

$$\nu = 2,3533,$$

et comme on a, à très peu près,

$$a = 400\,a', \quad \frac{1}{m} = 355000,$$

il vient

$$\frac{m'}{m} = \frac{1}{77}.$$

9. Masse des planètes dépourvues de satellites. — Ces masses ne peuvent être déterminées que par les perturbations, dont nous n'avons pas à nous occuper quant à présent, apportées dans leur mouvement elliptique par les attractions des autres planètes.

Le même procédé peut également s'appliquer aux planètes pourvues de satellites; c'est ainsi que l'on a trouvé $\frac{1}{1050}$ pour la masse de Jupiter (6).

Les rapports des masses des satellites d'une même planète à celles de cette planète peuvent également se calculer au moyen des perturbations que leurs actions mutuelles apportent dans leur mouvement elliptique autour de la planète, et l'on en déduit leur rapport à la masse du Soleil, puisque l'on connaît la masse de la planète rapportée à cette dernière.

En appliquant cette méthode au système de la Terre et du Soleil, on a trouvé

$$m = \frac{1}{34936}, \quad \frac{m'}{m} = \frac{1}{88},$$

valeurs qui diffèrent peu de celles auxquelles nous sommes arrivé plus haut.

10. Des comètes. — On reconnaît que les lois de Kepler se vérifient dans la partie des orbites cométaires que l'on peut observer; mais,

comme les grands axes de ces orbites et les durées des révolutions sont généralement inconnus, on calcule les éléments du mouvement des comètes dans le voisinage du périhélie, comme si leurs orbites étaient paraboliques. Nous aurons donc ici à faire l'application de la formule (8) du n° 1.

Les comètes, à cause de la petitesse de leur masse, ne produisent aucun effet appréciable sur les planètes : mais leurs mouvements sont troublés par les attractions planétaires qui influent notablement sur les époques de réapparition de chaque comète, c'est-à-dire sur l'intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs au périhélie.

En posant $\mu = \frac{k^2}{2D}$ ou $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$, l'équation (2) du n° 1 devient, en se rappelant (3) que l'on doit supposer $\mu = 1$,

$$\sqrt{2D}\, dt = r^2 dv. \tag{13}$$

D'autre part, si nous mesurons l'angle v à partir du périhélie, nous avons, pour l'équation de la parabole,

$$r = \frac{D}{\cos^2 \frac{v}{2}} = D\left(1 + \tang^2 \frac{v}{2}\right). \tag{14}$$

Posant $\chi = \tang v$ et portant la valeur précédente de r dans l'équation (13), on trouve

$$dt = D^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}\,(1 + \chi^2)\, d\chi;$$

d'où, en intégrant et prenant, pour origine du temps, l'instant du passage au périhélie,

$$t = D^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}\left(\tang \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \tang^3 \frac{v}{2}\right). \tag{15}$$

Les équations (14) et (15) sont celles dont on se sert dans la théorie des comètes; mais, comme presque toujours l'inconnue de la question est v et qu'elle dépend d'une équation du troisième degré, on a construit, pour éviter la résolution de cette équation, des Tables donnant les valeurs de t qui correspondent à celles de v dans l'hypothèse de $D = 1$. Ces Tables permettent de trouver l'angle v décrit au bout du temps t dans une parabole quelconque en y cherchant la valeur de v qui correspond au temps $t D^{-\frac{3}{2}}$.

11. Relation entre le temps écoulé entre deux observations d'une comète et des quantités connues. — Supposons que r, v, t se rapportent à une première observation, et désignons par r', v', t' les quantités semblables relatives à une seconde observation; désignons par c la corde de l'arc parcouru. L'équation (15) donne la suivante :

$$t' = D^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\left(\operatorname{tang}\frac{v'}{2} + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{v'}{2}\right);$$

d'où, par soustraction,

$$\begin{aligned} t' - t &= D^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\left(\operatorname{tang}\frac{v'}{2} - \operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)\left[1 + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}^2\frac{v'}{2} + \operatorname{tang}\frac{v'}{2}\operatorname{tang}\frac{v}{2} + \operatorname{tang}^2\frac{v}{2}\right)\right] \\ &= D^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\left(\operatorname{tang}\frac{v'}{2} - \operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)\left[1 + \operatorname{tang}\frac{v'}{2}\operatorname{tang}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}\frac{v'}{2} - \operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Or nous avons

$$\operatorname{tang}\frac{v'}{2}\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \frac{1}{4}\left(\operatorname{tang}\frac{v'}{2} + \operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\operatorname{tang}\frac{v'}{2} - \operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)^2;$$

si donc nous posons

$$(\alpha) \qquad \eta^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(\operatorname{tang}\frac{v'}{2} + \operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)^2,$$

nous aurons

$$t' - t = D^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\left(\operatorname{tang}\frac{v'}{2} - \operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)\left[\eta^2 + \frac{1}{12}\left(\operatorname{tang}\frac{v'}{2} - \operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)^2\right]$$

ou encore, comme il est facile de s'en assurer,

$$(\beta) \quad t' - t = \tfrac{1}{3}D^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\left\{\left[\eta + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}\frac{v'}{2} - \operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)\right]^3 - \left[\eta - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}\frac{v'}{2} - \operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)\right]^3\right\}.$$

En projetant la corde c sur l'axe de la parabole et sur une perpendiculaire à sa direction, et faisant la somme des carrés, on trouve

$$\begin{aligned} c^2 &= (r'\cos v' - r\cos v)^2 + (r'\sin v' - r\sin v)^2 \\ &= \left[r'\left(2\cos^2\frac{v'}{2} - 1\right) - r\left(2\cos^2\frac{v}{2} - 1\right)\right]^2 + 4\left(r'\sin\frac{v'}{2}\cos\frac{v'}{2} - r\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

et, en remplaçant r', r par leurs valeurs déduites de l'équation (14),

$$\frac{c^2}{D^2} = \left(\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right)^2 + 4\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

$$= 4\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^2\left[1 + \frac{1}{4}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^2\right]$$

$$= 4\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^2\eta_1^2,$$

d'où

$$(\gamma) \qquad c = 2D\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\eta_1.$$

D'autre part, on a, en vertu de la formule (14),

$$r + r' = 2D\left[1 + \frac{1}{4}\left(\operatorname{tang}^2\frac{\varphi'}{2} + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right]$$

$$= 2D\left[\eta_1^2 + \frac{1}{4}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

et par suite, eu égard à la valeur (γ),

$$r + r' + c = 2D\left[\eta_1 + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\right]^2,$$

$$r + r' - c = 2D\left[\eta_1 - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\right]^2.$$

L'équation (β) devient enfin

$$(16) \qquad t' - t = \tfrac{1}{6}\left[(r + r' + c)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - c)^{\frac{3}{2}}\right].$$

En se reportant à cette même équation, on voit que, dans la formule (16), il faudra prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, selon qu'on aura

$$\eta_1 - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right) > 0 \quad \text{ou} \quad < 0;$$

comme le premier membre de cette double inégalité a le même signe

que l'expression

$$\eta^2 - \frac{1}{4}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 1 + \operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)}{\cos\frac{\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi}{2}},$$

qui sera positive ou négative, selon qu'on aura $\varphi' - \varphi < \pi$ ou $> \pi$; ne peut y avoir aucune ambiguïté sur le choix des signes dans la formule (16).

Cette formule, dans laquelle n'entre pas le paramètre de l'orbite, constitue ce qu'on appelle le *théorème de Lambert*, quoique Euler l'ait établi le premier dans le septième Volume des *Miscellanea Berolinensia*. Nous verrons plus loin comment on arrive à trouver ses équivalentes pour l'ellipse et l'hyperbole.

12. Du mouvement relatif par rapport à leur centre de gravité de deux points matériels qui s'attirent mutuellement, suivant la loi de la gravitation. — Concevons qu'on imprime aux deux points matériels de masses m, m' une vitesse égale et contraire à la vitesse constante en grandeur et en direction du centre de gravité G de l'ensemble de ces deux points. Les masses m, m' se mouvront sur la droite $m\mathrm{G}m'$ qui pivotera autour du centre G et décriront des courbes semblables, puisque, entre leurs distances respectives x, x' à ce centre, on a

$$mx = m'x' \quad \text{et} \quad (m + m')x = m'r,$$

r étant la distance des deux masses.

Le mouvement de m est donc uniquement dû à sa vitesse relative initiale par rapport à G, et à l'accélération

$$\varphi = \frac{m'}{r^2} = \frac{m'^3}{(m + m')^2 x^2},$$

dirigée vers ce centre et qui varie en raison inverse du carré de la distance au même centre. Il suit de là que, *dans leur mouvement relatif par rapport à leur centre de gravité, les masses m, m' décrivent dans un même plan et autour de ce point, comme foyer commun et centre de similitude, deux sections coniques semblables, mais inversement situées.* Ce cas est notamment celui des étoiles doubles, lorsque les attractions aux-

quelles elles sont soumises de la part des autres astres sont négligeables par rapport à leurs actions mutuelles.

13. Problème de Kepler. — On désigne sous ce nom la détermination des coordonnées polaires d'une planète en fonction du temps.

Supposons que l'anomalie vraie v soit mesurée à partir de la portion du grand axe dirigée vers le périhélie; l'équation de l'orbite sera

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}. \tag{17}$$

Si l'on observe que r est compris entre $a(1+e)$ et $a(1-e)$, on pourra poser

$$r = a(1-e\cos u). \tag{18}$$

L'angle u, qui passe en même temps que l'anomalie vraie par les valeurs zéro, π, 2π, a reçu le nom d'*anomalie excentrique de la planète* (1).

De ces deux équations, on déduit

$$\left\{\begin{array}{l} \cos v = -\dfrac{e-\cos u}{1-e\cos u}, \\ \text{d'où} \\ \tan\dfrac{v}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tan\dfrac{u}{2}, \quad dv = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\,du \quad (2). \end{array}\right. \tag{19}$$

---

(1) Cet angle a une signification géométrique qu'il est bon de connaître.

Soient A le périhélie; F le foyer correspondant; O le centre de l'ellipse; mY la perpendiculaire abaissée d'un point m de la courbe sur le grand axe et qui prolongée rencontre en Z la circonférence décrite sur $2a$ comme diamètre; u l'angle ZOA. On a

$$\mathrm{FY} = -r\cos v, \quad \mathrm{FY} = \mathrm{OF} + \mathrm{OY} = ae - a\cos u,$$

d'où

$$r\cos v = -a(e-\cos u).$$

En éliminant $r\cos v$ au moyen de la formule (17), on retombe sur la formule (18), de sorte que l'anomalie excentrique n'est autre chose que l'angle ZOA.

(2) De la formule précédente on tire en effet

$$dv = \cos^2\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{du}{\cos^2\dfrac{u}{2}} = \frac{\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}}{1+\dfrac{1+e}{1-e}\tan^2\dfrac{u}{2}}\,\frac{du}{\cos^2\dfrac{u}{2}},$$

et, en réduisant, on obtient bien le résultat dont il s'agit.

Désignons par T la durée de la révolution de la planète et posons

$$n = \frac{2\pi}{T}; \tag{20}$$

n est ce qu'on appelle la *moyenne vitesse angulaire* et nt le *mouvement moyen* ou l'*anomalie moyenne de la planète*. Si l'on prend le jour moyen pour unité de temps, on a, relativement à la Terre,

$$T = 365^j,256374, \quad \text{d'où} \quad n = 0^o59'8'',$$

en remplaçant 2π par 360^o. Cette valeur de T est la durée de l'année sidérale ou l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs du Soleil à une même étoile dans son mouvement par rapport à la Terre.

Si l'on élimine k entre les équations (1) et (2) du n° 1, on trouve

$$r^2 dv = na^2\sqrt{1-e^2}\, dt,$$

et, en remplaçant dans cette formule r et dv par leurs valeurs (18) et (19),

$$n\, dt = (1 - e\cos u)\, du,$$

d'où, en effectuant l'intégration et prenant pour origine du temps l'époque d'un passage au périhélie,

$$nt = u - e\sin u. \tag{21}$$

Nous remarquerons que, d'après la formule (12) du n° 3 et continuant à supposer $\mu = 1$, on a

$$n = a^{-\frac{3}{2}}. \tag{22}$$

14. Cas où l'on peut négliger les puissances de l'excentricité d'un ordre supérieur au premier. — L'équation (21) donne, dans cette hypothèse qui est admissible pour la plupart des planètes,

$$u = nt + e\sin(nt + e\sin u) = nt + e\sin nt, \tag{23}$$

et l'équation (18) devient par suite

$$r = a(1 - e\cos nt). \tag{24}$$

En posant $v = nt + \delta$, δ étant du même ordre de grandeur que e, la

première des équations (19), eu égard à la formule (23), donne un degré d'approximation convenu

$$\cos nt - \delta \sin nt = -e + (1 + e\cos u)\cos u$$
$$= \cos u - e\sin^2 u = \cos nt - 2e\sin^2 nt;$$

d'où

$$\delta = 2e\sin nt$$

et

$$v = nt + 2e\sin nt. \tag{25}$$

Si nous considérons un astre fictif animé de la vitesse angulaire constante n et partant du périhélie en même temps que la planète, il passera en même temps qu'elle à l'aphélie, puisque, pour ce point, $\sin nt = 0$, et reviendra au même instant au périhélie, et ainsi de suite indéfiniment. Dans la première moitié de la trajectoire, le rayon vecteur de l'astre fictif se trouvera en avant de celui de la planète, et il sera en arrière dans la seconde moitié. La quantité $2e\sin nt$ qui mesure l'écart des deux rayons vecteurs est ce qu'on appelle l'*équation du centre*. On corrige de cette manière, par la considération de l'astre fictif, l'inégalité du mouvement apparent du Soleil autour de la Terre dans l'écliptique.

Pour corriger celle qui résulte de l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, il suffit de concevoir un second astre fictif, circulant dans le plan de l'équateur, passant par l'équinoxe en même temps que le précédent et animé d'un mouvement angulaire uniforme ; il détermine ce qu'on appelle le *temps moyen*, qui coïncide quatre fois dans l'année avec le *temps vrai* indiqué par le mouvement réel du Soleil.

15. Développements des coordonnées polaires du mouvement elliptique en fonction du temps. — De l'équation (21) du n° 13, mise sous la forme

$$u = x + e\sin u, \tag{26}$$

en posant $x = nt$, on déduit d'une formule de Lagrange (1)

$$u = x + e\sin x + \frac{e^2}{1.2}\frac{d\sin^2 x}{dx} + \ldots + \frac{e^m}{1.2.3\ldots m}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\sin^m x;$$

(1) Formule (7) du n° 12 de l'Introduction, en y faisant $z = u$, $f(x) = \sin x$.

or on a

$$(a)\quad \begin{cases} 2\sin^2 x = -\cos 2x + 1, \\ 2^2 \sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x, \\ 2^3 \sin^4 x = \cos 4x - 4\cos 2x + 3, \\ 2^4 \sin^5 x = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x, \\ 2^5 \sin^6 x = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

En faisant les substitutions de ces valeurs dans l'équation précédente et après avoir effectué les différentiations, remplaçant x par nt, on trouve, pour le développement de l'anomalie excentrique en fonction du temps,

$$(27)\quad \begin{cases} u = nt + e\sin nt + \dfrac{e^2}{2.2}\,2\sin 2nt + \dfrac{e^3}{2.3.2^2}\,(3^2\sin 3nt - 3\sin nt) \\ \quad + \dfrac{e^4}{2.3.4.2^3}\,(4^3\sin 4nt - 4.2^3\sin 2nt) \\ \quad + \dfrac{e^5}{2.3.4.5.2^4}\left(5^4\sin 5nt - 5.3^4\sin 3nt + \dfrac{5.4}{1.2}\sin nt\right) + \dots \end{cases}$$

L'équation (18), mise sous la forme

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u,$$

donne (1)

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos x + e^2\sin^2 x + \frac{e^3}{2}\frac{d\sin^3 x}{dx} + \frac{e^4}{2.3}\frac{d^2\sin^4 x}{dx^2} + \frac{e^5}{2.3.4}\frac{d^3\sin^5 x}{dx^3} + \frac{e^6}{2.3.4.5}\frac{d^4\sin^6 x}{dx^4} + \dots$$

En ayant égard aux valeurs (a), effectuant les différentiations, puis remplaçant x par nt, on trouve, pour le développement du rayon vec-

(1) Formule (8) du n° 16 de l'Introduction, en y faisant

$$z = u, \quad f(x) = \sin x, \quad F(x) = 1 - e\cos x$$

teur,

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{r}{a} &= 1 - e\cos nt - \frac{e^2}{2}(\cos 2nt - 1) - \frac{e^3}{2.2^2}(3\cos 3nt - 3\cos nt)\\ &\quad - \frac{e^4}{2.3.2^3}(4^2\cos 4nt - 4.2^2\cos 2nt)\\ &\quad - \frac{e^5}{2.3.4.2^4}\left(5^3\cos 5nt - 5.3^3\cos^3 nt + \frac{5.4}{1.2}\cos nt\right) - \dots.\end{aligned}\right.$$

Pour obtenir le développement de l'anomalie vraie, nous remarquerons que la seconde des équations (19) peut se mettre sous la forme

$$\frac{E^{v\sqrt{-1}} - 1}{E^{v\sqrt{-1}} + 1} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{E^{u\sqrt{-1}} - 1}{E^{u\sqrt{-1}} + 1},$$

en représentant par E la base du système de logarithmes népériens. On déduit de là

$$E^{v\sqrt{-1}} = \frac{E^{u\sqrt{-1}}(\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}) + \sqrt{1-e} - \sqrt{1+e}}{E^{u\sqrt{-1}}(\sqrt{1-e} - \sqrt{1+e}) + \sqrt{1-e} + \sqrt{1+e}}.$$

Si l'on pose

$$(29)\qquad \lambda = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e}},$$

il vient

$$E^{v\sqrt{-1}} = E^{u\sqrt{-1}}\,\frac{1 - \lambda E^{-u\sqrt{-1}}}{1 - \lambda E^{u\sqrt{-1}}}$$

et, en prenant les logarithmes dans le système népérien,

$$v = u + \frac{\log(1 - \lambda E^{-u\sqrt{-1}}) - \log(1 - \lambda E^{u\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}}.$$

La quantité λ étant plus petite que l'unité, les logarithmes peuvent se développer suivant ses puissances ascendantes, et, en remplaçant ensuite les exponentielles imaginaires par des sinus ou cosinus, on trouve

$$(30)\qquad v = u + 2\left(\lambda\sin u + \frac{\lambda^2}{2}\sin 2u + \frac{\lambda^3}{3}\sin 3u + \frac{\lambda^4}{4}\sin 4u + \dots\right).$$

L'équation (27) nous fait déjà connaître u en fonction du temps ; en

y joignant l'équation (21), on obtient pour résultat

$$\sin u = \frac{u - nt}{e} = \sin nt + \frac{e}{2}\sin 2nt + \frac{e^2}{2^3}(3\sin 3nt - \sin t) + .$$

On a ensuite (1)

$$\sin 2u = \sin 2nt + e(\sin 3nt - \sin nt) + e^2(\sin 4nt - \sin 2nt) + \frac{e^3}{2^3.3}(25\sin 5nt - 27\sin 3nt + 4\sin nt) + \ldots,$$

$$\sin 3u = \sin 3nt + \frac{e}{2}(3\sin 4nt - 3\sin 2nt) + \frac{e^2}{2^3}(15\sin 5nt - 18\sin 3nt + 3\sin nt) + \frac{e^3}{4}(9\sin 6nt - 12\sin 4nt + 3\sin 2nt) + \ldots.$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à développer les puissances de λ, suivant celles de e. Posons à cet effet

$$1 + \sqrt{1 - e^2} = L,$$

d'où

$$L = 2 - \frac{e^2}{L} = e\lambda^{-1}.$$

En développant L^{-p} suivant les puissances ascendantes de e^2, on trouve (2)

$$L^{-p} = \frac{1}{2^p} + \frac{p}{2^{p+2}}e^2 + \frac{p(p+3)}{2.2^{p+4}}e^4 + \frac{p(p+4)(p+5)}{2.3.2^{p+6}}e^6 + \ldots,$$

d'où

$$\lambda^p = \frac{e^p}{2^p} + \frac{p}{2^{p+2}}e^{p+2} + \frac{p(p+3)}{2.2^{p+4}}e^{p+4} + \frac{p(p+4)(p+5)}{2.3.2^{p+6}}e^{p+6} + \ldots.$$

---

(1) Formule (8) du n° 16 de l'Introduction, en y faisant

$$z = u, \quad f(x) = \sin x, \quad F(x) = \sin 2x, 3x, \ldots \quad \text{et ensuite} \quad x = nt.$$

(2) En se reportant aux formules (1) et (8) du n° 16 de l'Introduction, nous devrons remplacer e par $-e^2$ et faire $x = 2$, $z = L$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $F(z) = z^{-p}$.

L'équation (30) donne alors

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi = {} & nt + 2e\sin nt + \frac{5}{2^2}e^2\sin 2nt + \frac{e^3}{2^2.3}(13\sin 3nt - 3\sin nt) \\ & + \frac{e^4}{2^5.3}(103\sin 4nt - 44\sin 2nt) \\ & + \frac{e^5}{2^6.3.5}(1097\sin 5nt - 645\sin 3nt + 50\sin nt) + \dots \end{aligned}\right.$$

pour le développement cherché.

Si, au lieu du périhélie, on prend, pour origine de la longitude, une position quelconque de la planète, il faudra remplacer dans la formule (31) φ par $\varphi - \omega$, en continuant à désigner par ω la longitude du périhélie; si, de plus, on choisit pour origine du temps un instant quelconque après le passage correspondant à la longitude moyenne ε, l'angle nt devra être augmenté de la constante

$$\varepsilon - \omega = nl:$$

ε est ce que l'on appelle la *longitude de l'époque* et l représente le temps moyen employé par la planète pour aller du périhélie à la nouvelle origine du temps.

Les formules (21), (28), (31) deviennent alors

$$(21')\qquad n(t+l) = u - e\sin u,$$

$$(28')\qquad \frac{r}{a} = 1 - e\cos n(t+l) - \frac{e^2}{2}[\cos 2n(t+l) - 1] + \dots,$$

$$(31')\qquad \varphi = nt + \varepsilon + 2e\sin n(t+l) + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2n(t+l) + \dots.$$

16. Supposons maintenant que l'on veuille rapporter le mouvement elliptique à un plan fixe $x\mathrm{M}y$ autre que celui de l'orbite et soient

φ l'angle de ces deux plans;

MN leur intersection ou la *ligne des nœuds;*

φ_1, α les longitudes de la planète et du nœud N estimées dans le plan $x\mathrm{M}y$, mesuré à partir de $\mathrm{M}x$;

r_1 la projection de r sur le même plan;

θ la latitude de la planète ou l'angle formé par r, r_1;

β la longitude du nœud dans le plan de l'orbite, mesurée à partir d'une origine quelconque.

La longitude $\varphi - \beta$ de la planète, dans le plan de la planète, mesurée à partir du nœud, est ce que l'on appelle l'*argument de la latitude* θ.

Le triangle sphérique rectangle, formé par les directions de MN, r et r_1, donne

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - \alpha) = \cos\varphi \operatorname{tang}(\varphi - \beta),$$

d'où (Introduction, n° 22), en posant $\gamma = \operatorname{tang}\varphi$,

$$(A)\quad \varphi_1 - \alpha = \varphi - \beta - \gamma^2 \sin 2(\varphi - \beta) + \tfrac{1}{2}\gamma^4 \sin 4(\varphi - \beta) - \tfrac{1}{3}\gamma^6 \sin 6(\varphi - \beta);$$

mais φ est de la forme

$$\varphi = nt + \varepsilon + e\mathrm{P},$$

P étant une fonction des sinus de l'angle $nt + \varepsilon - \omega$ et de ses multiples. Si nous désignons par i un nombre entier quelconque, nous aurons

$$\sin i(\varphi - \beta) = \cos ie\mathrm{P}.\sin i(nt + \varepsilon - \beta) + \sin ie\mathrm{P}.\cos i(nt + \varepsilon - \beta),$$

d'où, en développant,

$$\sin i(\varphi - \beta) = \left(1 - \frac{i^2 e^2 \mathrm{P}^2}{1.2} + \frac{i^4 e^4 \mathrm{P}^4}{1.2.3.4} - \frac{i^6 e^6 \mathrm{P}^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots\right) \sin i(nt + \varepsilon - \beta)$$
$$+ \left(ie\mathrm{P} - \frac{i^3 e^3 \mathrm{P}^3}{1.2.3} + \frac{i^5 e^5 \mathrm{P}^5}{1.2.3.4.5} - \frac{i^7 e^7 \mathrm{P}^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots\right) \cos i(nt + \varepsilon - \beta)$$

et, en supposant successivement $i = 2, 4, 6, \dots$, on arrivera finalement au développement (A) de $\varphi_1 - \alpha$ en sinus et cosinus de nt et de ses multiples.

Le triangle sphérique ci-dessus donne aussi

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi \sin(\varphi_1 - \alpha) = \gamma \sin(\varphi_1 - \alpha).$$

On déduit de là, en appliquant la méthode des exponentielles imaginaires, comme nous l'avons fait au n° 22 de l'Introduction,

$$(B)\quad \begin{cases} \theta = \gamma \sin(\varphi_1 - \alpha) + \dfrac{\gamma^3}{3.4}[\sin 3(\varphi_1 - \alpha) - 3\sin(\varphi_1 - \alpha)] \\ \qquad + \dfrac{\gamma^5}{5.16}[\sin 5(\varphi_1 - \alpha) - 5\sin 3(\varphi_1 - \alpha) + 10\sin(\varphi_1 - \alpha)] + \dots. \end{cases}$$

Enfin, en posant $\operatorname{tang}\theta = s$, on a

$$(C)\quad r_1 = r\cos\theta = r(1 + s^2)^{-\frac{1}{2}} = r\left(1 - \tfrac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2^3}s^4 - \frac{5}{2^5}s^6 + \frac{5.7}{2^7}s^8 - \dots\right).$$

Les formules (A), (B), (C) ne sont convergentes que si e et φ sont suffisamment petits.

17. Expression, indépendante de l'excentricité, du temps qui sépare deux positions d'une planète. — Nous prendrons le périhélie pour origine de la longitude. Appelons, pour la seconde position, r', u', v', t' les quantités analogues à r, u, v, t qui se rapportent à la première ; désignons par c la longueur de la corde qui joint les deux positions et posons

$$(a) \qquad \tau = t' - t, \quad \frac{u' - u}{2} = \beta, \quad \frac{u' + u}{2} = \beta_1.$$

De l'équation (21), établie pour les deux positions, on déduit par différence

$$(b) \qquad \tau = \frac{2}{n}(\beta - e\cos\beta_1 \sin\beta)$$

et l'équation (18) donne

$$(c) \qquad r + r' = 2a(1 - e\cos\beta_1\cos\beta).$$

D'un autre côté, on a

$$c^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v);$$

mais on déduit de la première des équations (19), en ayant égard à l'équation (18),

$$r\cos v = a(\cos u - e), \quad r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin u,$$

et, en établissant les valeurs semblables pour l'autre position de la planète, il est facile de former l'expression de $rr'\cos(v, v')$. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2(1 - \cos u)^2 + a^2(1 - \cos u')^2 - 2a^2(e - \cos u)(e - \cos u') \\ &\quad - 2a^2(1 - e^2)\sin u \sin u' \\ &= 2a^2(1 - e^2)(1 - \sin u \sin u') + a^2e^2(\cos^2 u + \cos^2 u') - 2a^2\cos u\cos u' \\ &= 2a^2(1 - e^2)(1 - \sin u\sin u' - \cos u\cos u') + a^2e^2(\cos u - \cos u')^2 \\ &= 2a^2(1 - e^2)(2 - 2\cos^2\beta) + a^2e^2(2\sin\beta\sin\beta_1)^2 \end{aligned}$$

et enfin

$$(d) \qquad c^2 = 4a^2\sin^2\beta(1 - e^2\cos^2\beta_1).$$

En portant la valeur de $\cos\beta_1$, déduite de la formule (c), dans les équations (b) et (d), on trouve

$$(b') \qquad \tau = \frac{2}{n}\left(\beta + \frac{r + r' - 2a}{2a}\tang\beta\right),$$

$$(d') \qquad c^2 = 4a^2\tang^2\beta\left\{\cos^2\beta - \left[\frac{2a - (r + r')}{2a}\right]^2\right\}.$$

Posons maintenant

$$(32) \qquad z = \frac{2a - c - (r + r')}{2a}, \quad z_1 = \frac{2a + c - (r + r')}{2a},$$

nous aurons, eu égard à la valeur (d'),

$$(z_1 - z)^2 = \frac{c^2}{a^2} = \tang^2\beta\left[\cos^2\beta - \tfrac{1}{4}(z_1 + z)^2\right],$$

d'où, en exprimant $\tang^2\beta$ et $\cos^2\beta$ au moyen de $\cos 2\beta$,

$$\cos 2\beta = zz_1 + \sqrt{(1 - z^2)(1 - z_1^2)} \quad (1)$$

et

$$2\beta = \arc\cos z - \arc\cos z_1,$$

$$\tang\beta = \frac{\sin(\arc\cos z) - \sin(\arc\cos z_1)}{z + z_1};$$

il vient donc, pour la relation cherchée,

$$(33) \qquad \tau = \frac{1}{n}\left[\arc\cos z - \arc\cos z_1 - \sin(\arc\cos z) + \sin(\arc\cos z_1)\right].$$

Dans le cas d'une orbite hyperbolique, z, z_1 étant plus grands que l'unité, la formule précédente sera compliquée d'imaginaires, que l'on fera disparaître en remplaçant $\arc\cos z$ et $\arc\cos z_1$ par leurs expressions logarithmiques :

$$\arc\cos z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\arc\cos z_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}\right),$$

(1) On donne le signe + au radical, parce que l'on doit avoir $\beta = 0$ pour $r = r'$, $c = 0$, et par suite $z = z_1$.

ce qui donne

$$(33') \quad \tau = \frac{1}{n}\left[\sqrt{z^2-1} \mp \sqrt{z_1^2-1} - \log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) \pm \log\left(z_1+\sqrt{z_1^2-1}\right)\right].$$

On n'affecte d'un double signe que les termes en z_1 dans l'hypothèse de $z > z_1$, puisque τ doit être positif. Les signes supérieurs correspondent à $\varphi' - \varphi < \pi$; car, pour $\varphi' - \varphi = 0$, τ doit être nul et l'on a $z = z_1$. D'autre part, comme τ est une fonction continue de $\varphi' - \varphi$, les termes en z_1 ne peuvent changer de signe qu'autant qu'ils viennent à s'annuler, ce qui a lieu pour $\varphi' - \varphi = \pi$, puisque alors $c = r + r'$, $z_1 = 1$, et quand $\varphi' - \varphi$ arrive à surpasser π, les signes doivent changer pour que τ continue à croître.

La formule (33), qui donne le temps indépendamment de l'excentricité du mouvement elliptique, doit encore s'appliquer quand l'ellipse, s'aplatissant indéfiniment, se change en une ligne droite limitée par les deux foyers. De ce que z et z_1 ne dépendent que de la somme des distances au point attirant, on conclut qu'une planète décrira un arc de son orbite dont la corde est c et dont les extrémités sont à des distances r, r' du Soleil dans le même temps qu'elle mettrait à arriver directement vers le Soleil de la distance $\frac{r+r'+c}{2}$ à la distance $\frac{r+r'-c}{2}$, si elle était partie sans vitesse initiale d'un point situé à une distance égale au grand axe de son orbite.

De ce qui précède on déduira sans peine, en supposant $a = \infty$, le théorème du n° 11.

§ II. — Détermination des constantes introduites dans les formules du mouvement elliptique.

18. Généralités. — Proposons-nous de déterminer complètement l'orbite d'une planète, connaissant l'une de ses positions et la grandeur et la direction de la vitesse correspondante. Ainsi les données de la question sont la vitesse w_0 de la planète dans la position considérée m_0, les distances q_0 et r_0 de la vitesse et de la position m_0 au centre M du Soleil.

La position du plan de l'orbite est évidemment déterminée.

Le double de l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon vecteur de la planète est donné par

$$k_0 = w_0 q_0.$$

La formule (11) du n° 2, en y faisant $\mu = 1$, $w = w_0$, $r = r_0$, fera connaître le demi-grand axe a.

De la première des formules (10) du même numéro, on déduira l'excentricité.

Nous prendrons, pour origine du temps, l'instant du passage de la planète au point m_0 et nous considérerons u et v comme se rapportant à ce point, angles qui sont à déterminer. De la relation

$$r_0 = a(1 - e\cos u)$$

on déduira u. La formule (21′) du n° 15 donne, en y faisant $t = 0$,

$$nl = u - e\sin u$$

ou, d'après la formule (22) du n° 13,

$$l = a^{\frac{3}{2}}(u - e\sin u).$$

Supposons que l'on mesure l'angle v à partir de la *ligne des nœuds*, intersection MN du plan de l'orbite avec un plan fixe $x\mathrm{M}y$; soient

φ l'angle compris sous ces deux plans, ou l'inclinaison censée connue de l'orbite;

α la longitude $\widehat{\mathrm{NM}x}$ de la ligne des nœuds mesurée à partir de l'origine $\mathrm{M}x$, qui est aussi censée donnée;

L la longitude, mesurée à partir de la même origine, de la projection $\mathrm{M}m_0'$ du rayon vecteur $\mathrm{M}m_0$ sur le plan $x\mathrm{M}y$;

θ_0 la longitude $\widehat{m_0\mathrm{M}m_0'}$ de m_0.

Le triangle sphérique rectangle déterminé par les trois droites $\mathrm{M}m_0$, $\mathrm{M}m_0'$, MN donne

$$(a)\qquad \begin{cases} \cos\theta_0 = \cos v\cos(\mathrm{L} - \alpha) + \sin v\sin(\mathrm{L} - \alpha)\cos\varphi, \\ \cos v = \cos\theta_0\cos(\mathrm{L} - \alpha); \end{cases}$$

d'où, par l'élimination de $\cos\theta_0$,

$$(b)\qquad \operatorname{tang} v = \frac{\operatorname{tang}(\mathrm{L} - \alpha)}{\cos\varphi}.$$

Enfin, on calculera la longitude ω du périhélie au moyen de l'équation (5) du n° 1, qui donne

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(v - \omega)}{a(1 - e^2)},$$

et tous les éléments de l'orbite se trouveront déterminés

19. Méthode de Gauss. — Généralement, on détermine les éléments d'une planète en observant cet astre dans deux de ses positions séparées par un intervalle de temps déterminé. Cette recherche, qui, envisagée à un point de vue général, présente de grandes difficultés de calcul, se simplifie notablement lorsque les deux observations sont très rapprochées l'une de l'autre, comme nous allons le reconnaître, en reproduisant ci-après les formules données par Gauss dans son célèbre Ouvrage intitulé : *Theoria motus corporum cœlestium.*

Soient

r, r', r'' les distances du centre du Soleil à trois positions d'une planète ;

$v < v' < v''$ les anomalies vraies relatives à ces positions mesurées à partir du périhélie ;

$2p$ le paramètre et e l'excentricité de l'ellipse.

L'équation polaire de l'ellipse donne

$$\frac{p}{r} - 1 = e\cos v, \quad \frac{p}{r'} - 1 = e\cos v', \quad \frac{p}{r''} - 1 = e\cos v''.$$

Si l'on ajoute entre elles ces trois égalités multipliées respectivement par

$$\sin(v'' - v'), \quad \sin(v - v''), \quad \sin(v' - v),$$

on reconnaît, en remplaçant les produits des lignes trigonométriques par des sommes, que le second membre du résultat obtenu est nul, et l'on a

$$p = rr'r'' \frac{[\sin(v'' - v') + \sin(v - v'') + \sin(v' - v)]}{r'r''\sin(v'' - v') + rr''\sin(v - v'') + rr'\sin(v' - v)}$$

$$= \frac{2\sin(v - v')}{2} \frac{\cos\left(v'' - \frac{v + v'}{2}\right) - \cos\left(\frac{v - v'}{2}\right)}{r'r''\sin(v'' - v') + rr''\sin(v - v'') + rr'\sin(v' - v)},$$

ou

$$(34)\qquad p=-\frac{4rr'r''\sin\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi')\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi'')\sin\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)}{r'r''\sin(\varphi''-\varphi')+rr''\sin(\varphi-\varphi'')+rr'\sin(\varphi'-\varphi)}.$$

Il est facile de s'assurer que le dénominateur de cette expression, changé de signe, représente le double de l'aire du triangle formé par les cordes qui joignent deux à deux les trois positions considérées de la planète.

Cela posé, admettons que l'on détermine par l'observation deux positions de la planète, les rayons r, r'', l'angle $\varphi''-\varphi$ et le temps t qui sépare les deux observations, et que r' soit le rayon vecteur qui divise en deux parties égales l'angle formé par r, r''; on a

$$\varphi'=\frac{\varphi+\varphi''}{2},$$

et la formule précédente se réduit à

$$(35)\quad p=\frac{4rr'r''\sin^2\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi)}{r'(r+r'')-2rr''\cos\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi)}=\frac{4r'\sin^2\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi)}{r'\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r''}\right)-2\cos\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi)},$$

équation qui renferme les inconnues r' et p.

La formule de Simpson, appliquée à $\int_{\varphi}^{\varphi''}r^2\,d\varphi$ donne, pour le double de l'aire du secteur elliptique limité par les rayons r, r'', la valeur approchée

$$\tfrac{1}{3}(\varphi''-\varphi)(r^2+4r'^2+r''^2),$$

en supposant la différence $\varphi''-\varphi$ assez petite pour qu'on puisse, avec une approximation suffisante, se contenter de la diviser en deux parties égales. Or, en remarquant que $p=a(1-e^2)$ et en se reportant à la première des formules (10) du n° 2, où l'on fera $\mu=1$, le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps est égal à $\sqrt{p}$; il vient donc

$$(36)\qquad t\sqrt{p}=\tfrac{1}{3}(\varphi''-\varphi)(r^2+4r'^2+r''^2).$$

En remplaçant, dans cette formule, r' par sa valeur tirée de la relation (35), on obtiendra une équation qui fera connaître p, par suite, les

autres éléments de l'orbite. Mais, comme cette équation est du cinquième degré en $\sqrt{p}$, pour en éviter la résolution dans chaque cas particulier, on procède par approximation en vue d'arriver à des formules d'une facile application.

Posons, à cet effet,

$$\sqrt{p} = q, \quad \frac{r''}{r} = \operatorname{tang}(45^\circ + \lambda),$$

nous aurons

$$(37) \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r''} = \frac{1}{\sqrt{rr''}} \frac{1 + \frac{r''}{r}}{\sqrt{\frac{r''}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{rr''}} \frac{1 + \operatorname{tang}(45^\circ + \lambda)}{\sqrt{\operatorname{tang}(45^\circ + \lambda)}} = \frac{2\cos\lambda}{\sqrt{rr''\cos 2\lambda}},$$

$$(38) \quad r^2 + r''^2 = rr''\left(\frac{r}{r''} + \frac{r''}{r}\right) = rr''\left[\frac{1}{\operatorname{tang}(45^\circ + \lambda)} + \operatorname{tang}(45^\circ + \lambda)\right] = \frac{2rr''}{\cos 2\lambda}.$$

D'autre part, l'équation (35), résolue par rapport à r', donne, eu égard à la relation (37),

$$(39) \quad r' = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi)\,(rr''\cos 2\lambda)^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - \frac{2\sin^2\frac{1}{4}(\varphi'' - \varphi)\sqrt{rr''\cos 2\lambda}}{q^2\cos\lambda}\right]\cos\lambda},$$

et, en portant cette valeur dans l'équation (36), ainsi que celle qui est donnée par la formule (38), on trouve

$$(40) \quad \frac{3}{2}\frac{qt}{rr''(\varphi'' - \varphi)} = \frac{1}{\cos 2\lambda} + \frac{2\cos 2\lambda\cos^2\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi)}{\left[1 - \frac{2\sin\frac{1}{4}(\varphi'' - \varphi)\sqrt{rr''\cos 2\lambda}}{q^2\cos\lambda}\right]^2\cos^2\lambda}.$$

On obtiendra une première valeur approchée q_0 de q en remplaçant dans l'équation (36) r'^2 par $\frac{r^2 + r''^2}{2}$ (1), ce qui donnera, en ayant égard

---

(1) On remarquera que l'on a

$$r^2 = r^2 + 2r(r' - r) + (r' - r)^2,$$
$$r'^2 = r''^2 + 2r''(r' - r'') + (r' - r)^2,$$

d'où

$$r'^2 = \frac{r^2 + r''^2}{2} + r(r' - r) + r''(r' - r'') + (r' - r)^2 + (r' - r'')^2.$$

Si les observations sont suffisamment rapprochées l'une de l'autre, on pourra négliger les

à la relation (38),

$$q_0 = \frac{2(\varphi'' - \varphi) rr''}{t \cos 2\lambda}.$$

Si l'on pose $q = q_0 + x$, x étant une quantité censée assez petite pour que l'on puisse négliger ses puissances d'un ordre supérieur au premier, l'équation (40) permettra de calculer x, et par suite une seconde valeur approchée de q. Mais nous n'entrerons pas dans ce détail de calcul, qui ne présente aucune difficulté, et nous nous bornerons à donner le résultat auquel on arrive et qui est le suivant :

$$(41) \qquad q = \sqrt{p} = \frac{(\varphi'' - \varphi) rr''}{3t \cos 2\lambda} \frac{1 + \gamma + 2,1\beta}{1 + 5\beta},$$

dans lequel on a

$$\beta = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{4} (\varphi'' - \varphi) \sqrt{rr'' \cos 2\lambda}}{3 \left[\frac{(\varphi'' - \varphi) rr''}{t \cos 2\lambda} \right]^2 \cos \lambda},$$

$$\gamma = \frac{2 \cos^2 2\lambda \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi'' - \varphi)}{(1 - 3\beta) \cos 2\lambda},$$

et la valeur de p ainsi déterminée sera d'autant plus exacte que les observations seront plus rapprochées.

Gauss a donné, dans l'Ouvrage précité, une autre méthode de calcul que nous ne reproduirons pas et pour laquelle nous renverrons soit à cet Ouvrage, soit à l'*Astronomie* de Delambre.

20. On peut aussi déterminer les éléments de l'orbite d'une planète en se donnant les rayons vecteurs correspondant à trois positions de la

---

deux termes de cette valeur; la somme des deux termes précédents est égale, au même degré d'approximation, à

$$r(r' - r) + r(r' - r'') = 2r\left(r' - \frac{r + r''}{2}\right)$$

et peut être aussi négligée, car on a, à très peu près,

$$r = \frac{r + r''}{2}.$$

On a donc ainsi approximativement

$$r'^2 = \frac{r^2 + r''^2}{2}.$$

planète et les temps employés à parcourir les arcs qu'elles déterminent. On est alors conduit à des équations dont quelques-unes ne sont pas résolubles algébriquement ; mais cet inconvénient disparaît lorsque les observations sont assez rapprochées pour qu'on puisse développer les coordonnées des positions correspondantes en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des intervalles de temps écoulés, et c'est maintenant ce qui va nous occuper.

21. Développements en séries de coordonnées d'une planète suivant les puissances ascendantes du temps. — Soient, à un instant quelconque t, x, y, z les coordonnées d'une planète parallèle à trois axes rectangulaires fixes passant par le centre M du Soleil. Nous poserons

$$(a)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dt}, \quad x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}, \quad \ldots, \\ s = r\dfrac{dr}{dt} = xx' + yy' + zz', \quad s' = \dfrac{ds}{dt}, \quad s'' = \dfrac{d^2s}{dt^2}, \quad \ldots. \end{cases}$$

Toutes les quantités qui se rapportent à l'instant initial seront caractérisées par l'indice zéro.

Le temps t sera considéré comme positif ou négatif selon qu'il sera postérieur ou antérieur à son origine.

On a, en supposant le temps t suffisamment petit,

$$(b)\qquad x = x_0 + t\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_0 + \ldots,$$

et, pour l'une des équations du mouvement elliptique,

$$(c)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r^3}.$$

Si l'on différentie successivement cette équation, on trouve

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{3x}{r^5}s - \frac{x'}{r^3},$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = \left(3s' - 3.5\frac{s^2}{r^2} + \frac{1}{r}\right)\frac{x}{r^5} + \frac{2.3}{r_5}s\,x',$$

. . . . . .

En ayant égard à ces valeurs et à l'équation (c), et si nous posons

$$(42)\quad \begin{cases} \mathrm{T} = 1 - \frac{1}{r_0^3}\frac{t^2}{1.2} + \frac{3s_0}{r_0^5}\frac{t^3}{1.2.3} + \left(3s_0' - 3.5\frac{s_0^2}{r_0^2} + \frac{1}{r_0}\right)\frac{1}{r_0^5}\frac{t^4}{1.2.3.4} + \ldots, \\ \mathrm{U} = t - \frac{1}{r_0^3}\frac{t^3}{1.2.3} + \frac{2.3s_0}{r_0^5}\frac{t^4}{1.2.3.4} + \ldots, \end{cases}$$

la série (b) prend la forme

$$(43)\quad \begin{cases} x = x_0\mathrm{T} + x_0'\mathrm{U}, \\ \text{et l'on a de même} \\ y = y_0\mathrm{T} + y_0'\mathrm{U}, \\ z = z_0\mathrm{T} + z_0'\mathrm{U}. \end{cases}$$

Il convient de rappeler que s_0 est une fonction linéaire de x_0', y_0', z_0', dont les coefficients sont respectivement x_0, y_0, z_0.

Nous remarquerons que, en différentiant l'une des formules (a), on a

$$s' = x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

ou, en ayant égard à l'équation (c) et à celles qui en résultent quand on y remplace x par y et z,

$$(\alpha)\qquad s' = -\frac{1}{r} + x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Si donc on désigne en général par w la vitesse de la planète, nous aurons

$$(e)\qquad s_0' = -\frac{1}{r_0} + x_0'^2 + y_0' + z_0'^2 = -\frac{1}{r_0} + w_0^2.$$

22. Supposons que l'on connaisse deux positions de la planète, ou x_0, y_0, z_0, x, y, z, et le temps t écoulé, supposé assez petit pour qu'on puisse en négliger les puissances supérieures à la troisième. Les valeurs de T et de U se trouvant alors indépendantes de s_0, s_0', les équations (43) seront linéaires en x_0', y_0', z_0' et permettront de déterminer ces quantités; on sera ainsi ramené, pour la détermination des éléments de l'orbite, au cas étudié au n° 18. La valeur s_0 se déterminera en raison même de la signification de cette quantité, et celle s_0' au moyen de la formule (e).

On peut calculer immédiatement a et e au moyen de s_0 et s'_0; en effet, en éliminant $\frac{dv}{dt}$ entre les équations (2) et (3) du n° 1, en y remplaçant φ par $\frac{1}{r^2}$, puis substituant à k et h leurs valeurs (10) du n° 2, on trouve

$$2r - \frac{r^2}{a} - s^2 = a(1 - e^2),$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{dr}{dt} - \frac{r}{a}\frac{dr}{dt} - ss' = 0;$$

mais, comme $s = r\frac{dr}{dt}$, il vient

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{a} = s'.$$

Nous avons donc

$$(44) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{a} = s'_0, \\ 2r_0 - \dfrac{r_0^2}{a} - s_0^2 = a(1 - e^2). \end{cases}$$

On remarquera que les quantités s_0, s'_0, qui entrent dans T et U, ne dépendent que de la forme de l'orbite et non de sa position.

23. Admettons maintenant que l'on connaisse trois rayons vecteurs r_0, r_1, r_2 et les temps t, t' employés à parcourir les intervalles qui séparent les deux derniers du premier; les équations (43) donnent, en faisant la somme de leurs carrés,

$$r_1^2 = r_0^2 \mathrm{T}^2 + 2 s_0 \mathrm{TU} + (x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2)\mathrm{U}^2;$$

mais de l'équation (11) du n° 2 et de la première des équations (44) du numéro précédent, on tire

$$x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 = \frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} = \frac{1}{r_0} + s'_0;$$

il vient donc

$$r_1^2 = r_0^2 \mathrm{T}^2 + 2 s_0 \mathrm{TU} + \left(\frac{1}{r_0} + s'_0\right)\mathrm{U}^2.$$

On a de même, en désignant par T′ et U′ ce que deviennent T et U

lorsqu'on y remplace t par t',

$$r_2^2 = r_0^2 T'^2 + 2 s_0 T' U' + \left(\frac{1}{r_0} + s_0'\right) U'^2,$$

et, en s'arrêtant aux termes du troisième ordre en t et t', on aura deux équations qui permettront de déterminer s_0, s_0', par suite a et e, au moyen des équations (44), et enfin les autres éléments de l'orbite.

§ III. — Détermination des éléments d'une orbite cométaire.

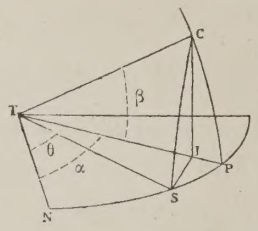
24. Le problème de cette détermination au moyen de trois observations, sur lequel Newton s'est exercé le premier et dont il n'a laissé que des solutions imparfaites, a occupé plusieurs grands géomètres : Euler, Lambert, Lagrange, Legendre, qui ont proposé des formules approximatives d'une application plus ou moins facile.

La méthode qui se prête le mieux au calcul est celle d'Olbers, telle qu'elle a été perfectionnée par Gauss à l'occasion de la seconde comète de 1813, et c'est la seule que nous exposerons.

25. Soient (*fig.* 1)

T le centre de la Terre supposé fixe;
N le nœud descendant de l'écliptique;
S, C deux positions contemporaines du Soleil et de la comète;

Fig. 1.



$R = ST$, $\theta = \widehat{STN}$ la distance du Soleil à la Terre et la longitude du Soleil;

$\rho = TI$ la projection, sur l'écliptique, de la distance de la comète à la Terre;

$\alpha = \widehat{TPN}$, $\beta = \widehat{CTP}$ la longitude et la latitude de la comète;
$r = SC$ la distance de la comète au Soleil.

Nous affecterons respectivement des indices 0, 1, 2 les lettres qui se rapportent à la première, à la deuxième et à la troisième observation, en ne perdant pas de vue que les longitudes du Soleil et de la comète et la latitude de cette dernière sont les seules données de la question.

Nous avons

$$r = CS = \sqrt{\overline{CI}^2 + \overline{SI}^2} = \sqrt{\rho^2 \tang^2\beta + R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\alpha - \theta)}$$
$$= \sqrt{\frac{\rho^2}{\cos^2\beta} - 2R\rho\cos(\alpha - \theta) + R^2}.$$

Si donc nous posons

$$(45)\quad \rho_2 = \nu\rho_0, \quad \cos(\alpha_0 - \theta_0)\cos\beta_0 = \cos\psi_0, \quad \cos(\alpha_2 - \theta_2)\cos\beta_2 = \cos\psi_2,$$

nous aurons

$$(46)\quad \begin{cases} r_0 = \sqrt{\left(\dfrac{\rho_0}{\cos\beta_0} - R_0\cos\psi_0\right)^2 + R_0^2\sin^2\psi_0}, \\ r_2 = \sqrt{\left(\dfrac{\nu\rho_0}{\cos\beta_2} - R_2\cos\psi_2\right)^2 + R_2^2\sin^2\psi_2}. \end{cases}$$

Concevons qu'on rapporte la comète à trois axes rectangulaires Sx, Sy, Sz passant par le centre du Soleil, l'un parallèle à la direction de TN, le deuxième compris dans le plan de l'écliptique et perpendiculaire à cette direction, et le troisième perpendiculaire à l'écliptique. Les coordonnées du point C par rapport à ces trois axes étant respectivement

$$(a)\qquad x = \rho\cos\alpha - R\cos\theta, \quad y = \rho\sin\alpha - R\sin\theta, \quad z = \rho\tang\beta,$$

il vient, en désignant par c la longueur de la corde qui joint la première position observée à la troisième,

$$c = \sqrt{\left\{\begin{array}{l} [\rho_0(\nu\cos\alpha_2 - \cos\alpha_0) - (R_2\cos\theta_2 - R_0\cos\theta_0)]^2 \\ + [\rho_0(\nu\sin\alpha_2 - \sin\alpha_0) - (R_2\sin\theta_2 - R_0\sin\theta_0)]^2 \\ + \rho_0^2(\nu\tang\beta_2 - \tang\beta_0)^2 \end{array}\right\}}.$$

Si nous introduisons dans cette formule les quantités auxiliaires g,

G, h, H, ζ, φ, définies par les relations

$$(47)\quad \begin{cases} R_2\cos\theta_2 - R_0\cos\theta_0 = g\cos G, & R_2\sin\theta_2 - R_0\sin\theta_0 = g\sin G, \\ \nu\cos\alpha_2 - \cos\alpha_0 = h\cos\zeta\cos H, & \nu\sin\alpha_2 - \sin\alpha_0 = h\cos\zeta\sin H, \\ \nu\tang\beta_2 - \tang\beta_0 = h\sin\zeta, & \cos\zeta\cos(G-H) = g\cos\varphi, \end{cases}$$

nous aurons

$$c = \sqrt{\rho_0^2 h^2 - 2\rho_0 h\cos\zeta\cos(G-H) + g^2} = \sqrt{(\rho_0 h - g\cos\varphi)^2 + g^2\sin^2\varphi}$$

ou

$$(48)\qquad c = \sqrt{u^2 + g^2\sin^2\varphi},$$

en substituant à l'inconnue ρ_0 l'auxiliaire

$$(49)\qquad u = \rho_0 h - g\cos\varphi.$$

Enfin, si nous faisons

$$(50)\quad g\cos\varphi - h\cos\beta_0 R_0\cos\psi_0 = \gamma_0, \quad g\cos\varphi - \frac{h}{\nu}\cos\beta_2 R_2\cos\psi_0 = \gamma_2,$$

les équations (46) deviennent

$$(51)\quad \begin{cases} r_0 = \sqrt{\left(\dfrac{u+\gamma_0}{h\cos\beta_0}\right)^2 + R_0^2\sin^2\psi_0}, \\ r_2 = \sqrt{\left(\dfrac{u+\gamma_2}{\dfrac{h}{\nu}\cos\beta_2}\right)^2 + R_0^2\sin^2\psi_2}. \end{cases}$$

Nous allons maintenant chercher à calculer approximativement la valeur de ν. Les formules (43) du n° 21, en conservant les notations du n° 23, donnent

$$x_1 = x_0 T + x_0' U,$$
$$x_2 = x_0 T' + x_0' U';$$

d'où, par l'élimination de x_0',

$$(b)\qquad U'' x_0 - U' x_1 + U x_2 = 0,$$

en posant

$$(c)\qquad U'' = TU' - UT',$$

et l'on aura deux équations pareilles à (b) entre les coordonnées de la comète parallèles aux deux autres axes.

En remplaçant, dans l'équation (b) et dans celles qui lui correspondent relativement aux axes des y et des z, les coordonnées de la comète dans les trois positions observées par leurs valeurs déduites des formules (a), on trouve

$$(52)\quad \begin{cases} U''\rho_0\cos\alpha_0 - U'\rho_1\cos\alpha_1 + U\rho_2\cos\alpha_2 = U''R_0\cos\theta_0 - U'R_1\cos\theta_1 + UR_2\cos\theta_2, \\ U''\rho_0\sin\alpha_0 - U'\rho_1\sin\alpha_1 + U\rho_2\sin\alpha_2 = U''R_0\sin\theta_0 - U'R_1\sin\theta_1 + UR_2\sin\theta_2, \\ U''\rho_0\operatorname{tang}\beta_0 - U'\rho_1\operatorname{tang}\beta_1 + U''\rho_2\operatorname{tang}\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Désignons par $X = -R\cos\theta$, $Y = -R\sin\theta$ les coordonnées de la Terre parallèles aux axes Sx, Sy et par X', Y' leurs dérivées par rapport au temps; ces éléments satisferont à des équations de la même forme que les équations (43) du n° **21**, et, désignant par Θ et Υ ce que deviennent alors les fonctions T et U, nous aurons

$$(d)\quad \begin{cases} X_1 = X_0\Theta + X'_0\Upsilon, & Y_1 = Y_0\Theta + Y'_0\Upsilon, \\ X_2 = X_0\Theta' + X'_0\Upsilon'; & Y_2 = Y_0\Theta' + Y'_0\Upsilon'. \end{cases}$$

En représentant respectivement par L, L' les valeurs des seconds membres des deux premières équations du groupe (52), nous avons

$$\begin{aligned} L &= -U''X_0 + U'X_1 - UX_2, \\ L' &= -U''Y_0 + U'Y_1 - UY_2 \end{aligned}$$

ou, en vertu des valeurs (d),

$$(e)\quad \begin{cases} L = X_0(-U'' + U'\Theta - U\Theta') + X'_0(U'\Upsilon - U\Upsilon'), \\ L' = Y_0(-U'' + U'\Theta - U\Theta') + Y'_0(U'\Upsilon - U\Upsilon'). \end{cases}$$

En s'arrêtant aux termes du troisième ordre en t, t', on a (**21**)

$$(f)\quad \begin{cases} T = 1 - \dfrac{t^2}{2r_0^3} + \dfrac{s_0 t^3}{2r_0^5}, \\ T' = 1 - \dfrac{t'^2}{2r_0^3} + \dfrac{s_0 t'^3}{2r_0^5}; \\ U = t\left(1 - \dfrac{t^2}{6r_0^3} + \dfrac{s_0 t^3}{4r_0^5}\right), \\ U' = t'\left(1 - \dfrac{t'^2}{6r_0^3} + \dfrac{s_0 t'^3}{4r_0^5}\right); \end{cases}$$

d'où l'on déduit, en se reportant à la formule (c),

$$(g) \qquad U'' = (t'-t)\left[1 - \frac{(t'-t)^2}{6r_0^3} + \frac{s_0}{4r_0^3}(t+t')^3\right].$$

Les formules (f) nous donnent aussi, en appelant S l'équivalent de s pour la Terre,

$$(h) \qquad \begin{cases} \theta = 1 - \dfrac{t^2}{2R_0^2} + \dfrac{S_0 t^3}{2R_0^5}, \\ \theta' = 1 - \dfrac{t'^2}{2R_0^2} + \dfrac{S_0 t'^3}{2R_0^5}; \\ \Upsilon = t\left(1 - \dfrac{t^2}{6R_0^3} + \dfrac{S_0 t^3}{4R_0^5}\right), \\ \Upsilon' = t'\left(1 - \dfrac{t'^2}{6R_0^3} + \dfrac{S_0 t'^3}{4R_0^5}\right). \end{cases}$$

En substituant les valeurs (f), (g), (h) dans les formules (e) et posant

$$(i) \qquad W = \frac{t't(t'-t)}{2}\left[\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{r_0^3} + (t'+t)\left(\frac{s_0}{r_0^5} + \frac{S_0}{R_0^5}\right)\right],$$

on trouve

$$(j) \qquad \begin{cases} L = W\left(X_0 + \dfrac{t'+t}{3}X_0'\right), \\ L' = W\left(Y_0 + \dfrac{t'+t}{3}Y_0'\right). \end{cases}$$

Or $X_0 + \frac{t'+t}{3}X_0'$, $Y_0 + \frac{t'+t}{3}Y_0'$, représentent, aux termes du second ordre près, les coordonnées de la Terre au bout du temps $\frac{t'+t}{3}$ compté à partir de la première observation. Si donc on désigne par R′ et θ′ le rayon vecteur et la longitude du Soleil à cet instant, qui seront donnés par les Tables, les formules (52) deviennent

$$(53) \qquad \begin{cases} U''\rho_0\cos\alpha_0 - U'\rho_1\cos\alpha_1 + U\rho_2\cos\alpha_2 = -WR'\cos\theta', \\ U''\rho_0\sin\alpha_0 - U'\rho_1\sin\alpha_1 + U\rho_2\sin\alpha_2 = -WR'\sin\theta', \\ U''\rho_0\tan\beta_0 - U'\rho_1\tan\beta_1 + U\rho_2\tan\beta_2 = 0. \end{cases}$$

En divisant l'une par l'autre les valeurs de $U\rho_2$, $U''\rho_0$ que l'on tire de

ces équations, on trouve

$$(54) \qquad \frac{\rho_2}{\rho_0} = \nu = \frac{\operatorname{tang}\beta_1 \sin(\theta' - \alpha_0) - \operatorname{tang}\beta_0 \sin(\theta' - \alpha_1)}{\operatorname{tang}\beta_2 \sin(\theta' - \alpha_1) - \operatorname{tang}\beta_1 \sin(\theta' - \alpha_2)} \frac{U''}{U},$$

et la valeur de ν se trouvera ainsi déterminée. On remarquera que, si les observations sont suffisamment rapprochées, on peut prendre approximativement

$$\frac{U''}{U} = \frac{t' - t}{t}.$$

Les équations (48) et (51) ne renferment plus que l'inconnue u, dont on obtiendra la valeur par tâtonnements, en cherchant à satisfaire, au moyen des expressions de c, r_0, r à l'équation (16) du n° 11, qui devient dans ce cas

$$(55) \qquad t'' = \tfrac{1}{6}\left[(r_0 + r_2 + c)^{\frac{3}{2}} - (r_0 + r_2 - c)^{\frac{3}{2}}\right]$$

en prenant le signe — pour le second terme du second membre, attendu que t'' correspond à un espace angulaire moindre que 180°.

La quantité u étant connue, on en déduira la valeur de ρ_0; par suite, celle de $\rho_2 = \nu\rho_0$.

§ IV. — Du mouvement dans un plan d'un point attiré ou repoussé par deux centres fixes suivant la loi de la raison inverse du carré de la distance.

26. Soient

F, F′ les deux centres fixes;
O le milieu de la droite qui les joint;
$2c$ la longueur de cette droite;
r, r' les distances du point mobile m à F, F′;
$\frac{\mu}{r^2}$, $\frac{\mu'}{r'^2}$ les forces qui sollicitent m dirigées vers F, F′, chacun des coefficients μ et μ' étant positif ou négatif, selon qu'il s'agit d'une attraction ou d'une répulsion.

Pour plus de généralité, nous admettrons avec Lagrange que m est de plus sollicité par une force $2\nu r$ dirigée vers le point O et propor-

tionnelle à la distance $Om = \rho$ à ce point, le coefficient ν étant aussi positif ou négatif, selon que la force sera attractive ou répulsive.

Nous avons pour le potentiel

$$(a) \qquad V = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu'}{r'} - \nu\rho^2.$$

La solution que nous allons donner, et qui est due à Liouville, est basée sur l'emploi des coordonnées elliptiques, dont nous nous sommes occupé au Titre II de l'Introduction.

Nous prendrons le point O pour origine des coordonnées et la direction de OF pour celle de la partie positive de l'axe des x.

Dans l'ellipse dont le grand axe est $2a$, on a

$$\rho = a + \frac{c}{a}x$$

et, en vertu de la première des équations (1) du Titre II de l'Introduction,

$$(b) \qquad r = a + b,$$

d'où

$$(c) \qquad r' = 2a - r = a - b.$$

Des équations précitées on déduit

$$(d) \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

La formule (a) donne alors

$$(e) \qquad \lambda V = [(\mu + \mu')a + \nu c^2 a^2 - \nu a^4] - [(\mu - \mu')b + \nu c^2 b^2 - \nu b^4)],$$

en se rappelant que l'on a posé $\lambda = a^2 - b^2$.

La condition d'intégrabilité exprimée par l'équation (14) de l'Introduction est donc satisfaite, et l'on a

$$(f) \qquad \begin{cases} F(a) = [(\mu + \mu')a + \nu c^2 a^2 - \nu a^4], \\ F_1(b) = [(\mu - \mu')b + \nu c^2 b^2 - \nu b^4]. \end{cases}$$

L'équation (16) de l'Introduction donne, par suite,

$$(A)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{da}{\sqrt{(a^2-c^2)\,[(\mu+\mu')\,a+\nu c^2 a^2-\nu a^4+A a^2-B]}}\\ &\quad=\frac{db}{\sqrt{(c^2-b^2)\,[B-A b^2+\nu b^4-\nu c^2 b^2-(\mu-\mu')\,b]}}, \end{aligned}\right.$$

et la formule (17)

$$(B)\qquad \left\{\begin{aligned} dt=&\frac{a^2\,da}{\sqrt{2(a^2-c^2)\,[(\mu+\mu')\,a+\nu c^2 a^2-\nu a^4+A a^2-B]}}\\ &-\frac{b^2\,db}{\sqrt{2(c^2-b^2)\,[B-A b^2+\nu b^4-\nu^2 c^2 b^2-(\mu-\mu')\,b]}}. \end{aligned}\right.$$

27. Proposons-nous maintenant de déterminer les constantes arbitraires A et B introduites par les intégrations, mais seulement dans le cas où le point O n'est pas un centre d'attraction ou de répulsion, c'est-à-dire lorsqu'on a $\nu = 0$. En se reportant aux équations (A) et (B), on voit que la solution du problème se ramène à des intégrales elliptiques de première espèce.

Les conditions du problème sont, pour $t = 0$: 1° les valeurs r_0, r'_0 de r et r'; 2° v_0 la vitesse du mobile; 3° l'angle α que forme la direction de cette vitesse avec l'axe Ox.

Nous distinguerons d'ailleurs par l'indice 0 toutes les autres quantités qui se rapportent à l'origine du temps, et nous poserons

$$a'=\frac{da}{dt},\quad b'=\frac{db}{dt}.$$

Des équations (b) et (c) on tire

$$a_0+b_0=r_0,\quad a_0-b_0=r'_0,$$

d'où

$$(g)\qquad a_0=\frac{r_0+r'_0}{2},\quad b_0=\frac{r'_0-r_0}{2},$$

valeurs qui se trouvent ainsi déterminées.

Nous avons

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=v_0\cos\alpha,\quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0=v_0\sin\alpha,$$

et les équations (2) du Titre II de l'Introduction donnent, par suite,

$$(h)\qquad \begin{cases} v_0 \cos\alpha = \dfrac{1}{c}(a_0 b'_0 + a'_0 b_0), \\ v_0 \sin\alpha = \dfrac{1}{c}\left(\sqrt{\dfrac{c^2 - b_0^2}{a_0^2 - c^2}}\, a_0 a'_0 - \sqrt{\dfrac{a_0^2 - c^2}{b_0^2 - c^2}}\, b_0 b'_0\right), \end{cases}$$

d'où l'on déduira a'_0 et b'_0.

La constante A, introduite dans l'équation des forces vives, a évidemment pour valeur

$$(i)\qquad A = \frac{v_0^2}{2} - \left(\frac{\mu}{r_0} + \frac{\mu'}{r'_0}\right) = \frac{1}{2} v_0^2 - \left(\frac{\mu}{a_0 + b_0} + \frac{\mu'}{a_0 - b_0}\right).$$

L'équation (17) de l'Introduction donne, en ayant égard à la valeur (*f*) de F(a),

$$(j)\qquad B = (\mu + \mu')\, a_0 + A\, a_0^2 - \frac{(a_0 - b_0)^2 a_0'^2}{2(a^2 - c^2)},$$

et les constantes A et B se trouvent ainsi déterminées.

CHAPITRE II.

DES PERTURBATIONS DES PLANÈTES.

§ I. — Considérations générales.

28. Nous conviendrons, pour simplifier le langage, de comprendre les satellites dans le système des planètes, à la condition de substituer au centre du Soleil celui de la planète autour de laquelle circule un satellite.

Nous avons déjà fait remarquer au n° 3 que le mouvement d'une planète autour du Soleil n'est pas rigoureusement elliptique en raison des actions qu'elle reçoit de la part des autres planètes de notre système solaire; les différences entre le mouvement elliptique et le mouvement réel avaient déjà été constatées bien avant Newton pour certaines planètes; mais les lois auxquelles sont soumises ces inégalités restaient inconnues et n'ont pu être établies qu'après la découverte du principe de la gravitation. Kepler a dû faire abstraction de ces différences, dans les éléments de l'observation dont il disposait, pour établir les lois fondamentales de l'Astronomie moderne.

La détermination, même approximative, de la trajectoire réelle d'une planète présenterait de grandes difficultés et ne serait d'aucune utilité au point de vue de l'observation. Aussi la question a-t-elle été posée autrement et de cette manière : *Déterminer à des époques successives les éléments de l'ellipse que décrirait la planète à partir de chaque époque, si les causes perturbatrices dues aux autres planètes venaient subitement à s'annuler.*

On a donc, en premier lieu, à déterminer les éléments de l'orbite elliptique, connaissant, à un instant donné, la distance au Soleil, la grandeur et la direction de la vitesse de la planète.

Supposons d'abord que les époques soient infiniment rapprochées les unes des autres; au bout d'un temps infiniment petit, la grandeur et la direction de la vitesse de la planète auront été modifiées par la résultante perturbatrice; on obtiendra alors une autre ellipse, dont la position du plan, l'orientation du grand axe dans ce plan et les grandeurs de ce grand axe et de l'excentricité seront différentes de ce qu'elles étaient auparavant.

On aurait donc à déterminer les variations infiniment petites éprouvées par les éléments elliptiques en fonction de la résultante perturbatrice ou, plus exactement, de ses composantes.

Il suit de là que l'on aurait à considérer une série d'ellipses dont l'enveloppe serait la trajectoire réelle de la planète.

Mais, comme les variations éprouvées par les éléments de l'orbite elliptique sont très lentes, il n'est pas nécessaire de supposer infiniment petit l'intervalle qui sépare deux époques consécutives; il suffit d'admettre qu'il est assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré, ce qui revient à le considérer comme une différentielle du temps.

Cette manière d'envisager le problème des perturbations est due à Newton; elle a été développée géométriquement par Lagrange (1) lorsque la force perturbatrice est comprise dans le plan déterminé par le centre du Soleil et la vitesse de la planète à un instant quelconque; d'où résulte que la trajectoire de la planète reste plane. Nous allons reprendre cette question, en suivant une marche qui nous paraît plus simple que celle qui a été tracée par l'illustre auteur de la *Mécanique analytique*.

29. Perturbation du mouvement elliptique dans l'hypothèse où la force perturbatrice est comprise dans le plan passant par le Soleil et la vitesse de la planète en un instant quelconque. — Proposons-nous d'abord de déterminer les éléments d'une orbite elliptique, connaissant la vitesse de la planète en un point déterminé de cette orbite.

Soient (*fig.* 2)

M le foyer de l'ellipse occupé par le Soleil;
F_1 l'autre foyer, dont la position est à déterminer;

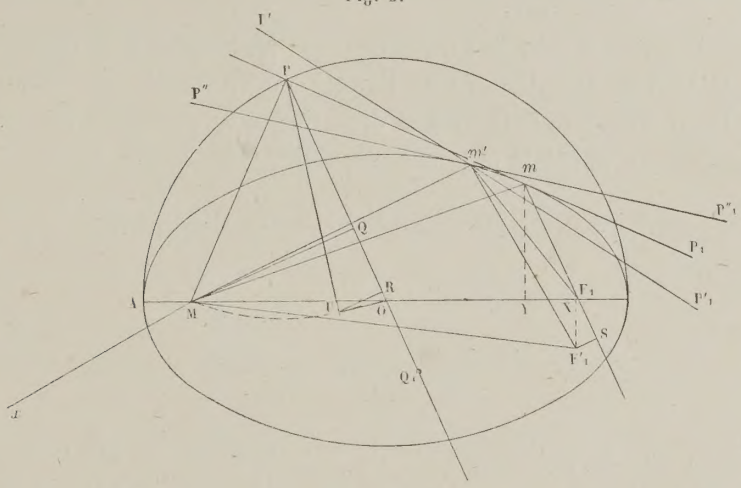
(1) *OEuvres*, t. V, p. 565.

MP la perpendiculaire abaissée du foyer M sur la tangente au point m de l'orbite où la vitesse w est donnée;

v la composante de cette vitesse normale à Mm;

b le demi-petit axe de l'ellipse.

Fig. 2.



Nos autres notations seront celles du § I du Chap. I.

Le principe des aires donne

$$k = w \cdot \overline{MP} = v \cdot \overline{Mm},$$

d'où

$$w = \frac{k}{MP}, \tag{1}$$

$$v = \frac{k}{r}. \tag{1'}$$

Nous avons trouvé (n^{os} 1 et 3)

$$\varphi = \frac{k^2}{a(1-e^2)r^2} = \frac{1}{r^2}, \tag{2}$$

et φ peut être considéré comme une donnée de la question.

L'élimination de k entre (1') et (2) donne, pour le demi-paramètre $p = \frac{b^2}{a}$ de la courbe,

$$p = \frac{v^2}{\varphi}.$$

qui se trouve ainsi déterminé par une troisième proportionnelle.

On peut obtenir une autre expression de p en éliminant k entre les équations (1) et (2), ce qui donne

$$p = \frac{\omega^2 \overline{MP}^2}{r^2 \varphi} = \omega^2 \overline{MP}^2. \tag{3}$$

Si par le point m on mène une droite mF_1 faisant avec la tangente mP un angle égal au supplément de l'angle connu PmM, cette droite sera parallèle au diamètre PO, dont la direction sera par suite déterminée.

Abaissant du point M la perpendiculaire MQ sur OP, on a

$$\overline{OM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 - 2\,OP.PQ = \overline{MP}^2 + a^2 - 2aPQ,$$

$$\overline{OM}^2 = a^2 - b^2 = a^2 - ap,$$

d'où

$$a = \frac{\overline{MP}^2}{2PQ - p}. \tag{4}$$

Portons sur le prolongement de PQ, à partir de Q, la longueur $QQ_1 = PQ$, puis, en revenant sur nos pas, la longueur $Q_1R = p$; élevons en R une perpendiculaire à PQ jusqu'à sa rencontre U avec le cercle décrit du point P comme centre, avec un rayon égal à PM; l'intersection de PO avec la perpendiculaire en U à PU déterminera le centre O de l'ellipse, dont tous les éléments seront par suite connus.

Les triangles PMm, PMQ sont semblables et donnent

$$PQ = \frac{\overline{MP}^2}{Fm} = \frac{\overline{MP}^2}{r};$$

et, en substituant cette valeur ainsi que celle (3) de p dans la formule (4), on retrouve ce résultat déjà obtenu (n° 2)

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \omega^2}. \tag{5}$$

Nous arrivons maintenant au mouvement troublé et nous désignerons par ψ l'accélération imprimée à m par l'action perturbatrice, et par ω_1 la composante suivant Mm de la vitesse ω de la planète.

Dans le temps dt, r augmentera de $w_1 dt$ dans l'ellipse que continuerait à décrire le mobile, si ψ s'annulait subitement, comme dans la trajectoire réelle de m; l'angle $\frac{v}{r} dt$, décrit dans le même temps, par le même rayon, aura également la même valeur dans les deux cas.

En différentiant l'équation (5), dont tous les éléments sont variables, on voit facilement que l'on a

$$da = -2 \frac{d\frac{1}{r} - w\,dw}{\left(\frac{2}{r} - w^2\right)^2} = -2a^2 d\frac{1}{r} + 2a^2 w\,dw.$$

Si nous appelons φ' et ψ' les composantes de φ et ψ suivant la direction de w, nous avons

$$dw = (\varphi' + \psi')\,dt;$$

d'où, en se reportant à la formule précédente,

$$da = 2a^2 \left(-d\frac{1}{r} + \varphi' w\,dt \right) + 2a^2 w\,\psi' dt;$$

or le premier terme de cette dernière formule n'est autre chose que l'accroissement que recevrait a dans l'hypothèse où m resterait sur l'ellipse primitive ou initiale. Ce terme est donc nul, et l'on a simplement

$$da = 2\psi' a^2 w\,dt, \tag{6}$$

expression qui peut également se mettre sous la forme suivante :

$$da = 2\frac{\psi'}{\varphi}\frac{a^2}{r^2} w\,dt. \tag{7}$$

Nous avons trouvé au n° **13**, pour l'expression de la vitesse angulaire moyenne de la planète,

$$n = a^{-\frac{3}{2}},$$

d'où

$$dn = -\frac{2}{3} a^{-\frac{5}{2}} da = -\frac{3}{2} n \frac{da}{a}, \tag{8}$$

ce qui, au moyen de la formule (7), fera connaître la variation de n.

Soient maintenant

m' la position qu'occupe le mobile m au bout du temps dt;
$P'm'P'_1$ la tangente à la trajectoire réelle de ce mobile arrivé en m';
$P''m'P''_1$ la tangente en m' à l'ellipse initiale;
F'_1 le second foyer de l'orbite elliptique correspondant au point m';
S la projection de F'_1 sur la direction de mF_1.

On a

$$\overline{m'M} + \overline{m'F_1} = 2a, \quad \overline{m'M} + \overline{m'F'_1} = 2a + 2da,$$

d'où

$$m'F'_1 - m'F_1 = 2da,$$

ou

$$F_1S = 2da = \frac{4\psi'}{\varphi'}\,\frac{a^2 w\,dt}{r^2}. \tag{9}$$

Nous avons maintenant

$$\widehat{F'_1m'P_1} = \widehat{F'_1m'P'_1} + \widehat{P_1m'P'_1} = \widehat{Mm'P'} + \widehat{P_1m'P'_1} = \widehat{Mm'P} + 2\widehat{P_1m'P'_1},$$

et de même

$$\widehat{F_1m'P_1} = \widehat{Mm'P} + 2\widehat{P_1m'P''_1},$$

d'où

$$\widehat{F'_1M'F_1} = 2\,(\widehat{P_1m'P'_1} - \widehat{P_1m'P''_1}).$$

Soient φ'' et ψ'' les composantes de φ et de ψ, estimées suivant la normale; on a, d'après une propriété connue,

$$\varphi'' + \psi'' = w\,\frac{\widehat{P_1m'P'_1}}{dt}, \quad \varphi'' = w\,\frac{\widehat{P_1m'P''_1}}{dt},$$

d'où, en se reportant à la relation précédente,

$$\widehat{F'_1m'F_1} = 2\,\frac{\psi''}{w}\,dt = 2\,\frac{\psi''}{w^2}\,w\,dt;$$

mais de l'équation (5) on déduit

$$w^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a} = \frac{\overline{mF_1}}{ar} = \frac{\varphi r}{a}\,\overline{mF_1}; \tag{10}$$

il vient donc

$$\widehat{F_1' m' F_1} = 2\frac{\psi''}{\varphi}\frac{a}{r.\overline{mF_1}}w\,dt$$

et enfin

$$\overline{F_1'S} = 2\frac{\psi''}{\varphi}\frac{a}{r}w\,dt. \tag{11}$$

Les équations (9) et (11) détermineront la position de F_1', par suite la variation de l'excentricité et celle $\widehat{F_1 M F_1'}$ de la longitude du périhélie.

Soient X, Y les projections de F_1 et m sur MF_1; on a

$$\overline{F_1X} = -2d.ae = \overline{F_1'S}\sin\widehat{mF_1Y} - \overline{F_1S}\cos\widehat{mF_1Y} = \overline{F_1'S}\frac{\overline{mY}}{\overline{mF_1}} - \overline{F_1S}\frac{\overline{F_1Y}}{\overline{mF_1}},$$

d'où, pour la variation de l'excentricité linéaire,

$$\left\{\begin{aligned} d.ae &= -\frac{\psi''}{\varphi}\frac{a}{r}\frac{\overline{mY}}{\overline{mF_1}}w\,dt + \frac{2\psi'}{\varphi}\frac{a^2}{r^2}\frac{\overline{F_1Y}}{\overline{mF_1}}w\,dt \\ &= \frac{a}{r}\left(-\frac{\psi''}{\varphi}\frac{\overline{mY}}{\overline{mF_1}} + \frac{2\psi'}{\varphi}\frac{a}{r}\frac{\overline{F_1Y}}{\overline{mF_1}}\right)w\,dt. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Si nous désignons par $d\omega$ la variation $\widehat{F_1 M F_1'}$ de la longitude du périhélie égale à $\frac{F_1'X}{MX} = \frac{F_1'X}{2MO}$, nous avons

$$F_1'X = \overline{F'S}\frac{\overline{F_1Y}}{\overline{mF_1}} + \overline{F_1S}\frac{\overline{mY}}{\overline{mF_1}} = \frac{2\psi''}{\varphi}\frac{a}{r}\frac{\overline{F_1Y}}{\overline{mF_1}}w\,dt + \frac{4\psi'}{\varphi}\frac{a^2}{r^2}\frac{\overline{mY}}{\overline{mF_1}}w\,dt$$

d'où

$$d\omega = \frac{\psi''}{\varphi}\frac{a}{r}\frac{\overline{F_1Y}}{\overline{mF_1}}\frac{w\,dt}{\overline{MO}} + \frac{2\psi'}{\varphi}\frac{a^2}{r^2}\frac{\overline{mY}}{\overline{mF_1}}\frac{w\,dt}{\overline{MO}} \tag{13}$$

30. Application au mouvement d'une planète dans un milieu résistant. — Proposons-nous de déterminer les altérations que produirait la résistance d'un milieu répandu dans l'espace, dans le mouvement d'une planète, en supposant la résistance proportionnelle à la seconde puissance de la vitesse.

L'accélération due à la force perturbatrice, dirigée en sens inverse de la vitesse, est ainsi de la forme $\psi' = -\rho w^2$, ρ étant un coefficient

proportionnel à la densité du milieu, et ψ'' est nul. En désignant par $ds = w\,dt$ l'élément de chemin décrit par la planète, et en se rappelant que $\varphi r^2 = 1$, on a, d'après ce qui précède,

$$(6') \qquad da = -2\rho w^2 a^2\,ds,$$

$$(12') \qquad dae = -2\rho w^2 a^2 \cos\widehat{mF_1Y}\,ds,$$

$$(13') \qquad d\omega = -2\rho w^2 a^2 \sin\widehat{mF_1Y}\,\frac{ds}{MO}.$$

De la deuxième et de la première de ces équations on déduit

$$(14) \qquad de = 2\rho w^2 a\left(e - \cos\widehat{mF_1Y}\right)ds.$$

Soient

Mx une droite fixe passant par le centre du Soleil;

$\omega = \widehat{AMx}$ la longitude du périhélie A;

$v = \widehat{mMx}$ l'anomalie ou longitude vraie de la planète.

L'équation de l'ellipse étant

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\omega)},$$

on a, en se reportant à l'équation (5),

$$(a) \qquad w^2 = \frac{1}{a}\left(\frac{2a}{r} - 1\right) = \frac{1+2e\cos(v-\omega)+e^2}{a(1-e^2)}.$$

Le triangle mMF_1 donne

$$(a') \qquad \sin\widehat{mF_1Y} = \frac{r\sin(v-\omega)}{2a-r} = \frac{(1-e^2)\sin(v-\omega)}{1+e^2+2e\cos(v-\omega)},$$

et l'on a de plus, en projetant sur MF_1,

$$(2a-r)\cos\widehat{mF_1Y} - r\cos(v-\omega) = 2ae,$$

d'où

$$(a'') \qquad \cos\widehat{mF_1Y} = \frac{2ae + r\cos(v-\omega)}{2a-r} = \frac{2e+(1+e^2)\cos(v-\omega)}{1+e^2+2e\cos(v-\omega)}.$$

En ayant égard aux valeurs (a), (a'), (a''), et remarquant que $MO = ae$, les équations (6′), (14) et (13′) se réduisent aux suivantes :

$$(15)\qquad \begin{cases} da = -\dfrac{2\rho a}{1-e^2}\left[1+e^2+2e\cos(v-\omega)\right]ds, \\ de = -2\rho\left[e+\cos(v-\omega)\right]ds, \\ e\,d\omega = -2\rho\sin(v-\omega)ds \quad (1). \end{cases}$$

De la relation connue (n° 13)

$$n = a^{-\frac{3}{2}},$$

on déduit

$$dn = -\frac{3}{2}a^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}da;$$

d'où

$$(16)\qquad dn = -\frac{3\rho n}{1-e^2}\left[1+e^2+2e\cos(v-\omega)\right]ds \quad (1).$$

On devra substituer dans les équations (15) et (16) la valeur

$$(17)\qquad ds = a(1-e^2)\frac{\sqrt{1+2e\cos(v-\omega)+e^2}}{\left[1+e\cos(v-\omega)\right]^2}dv$$

de l'élément d'arc de l'ellipse.

Si ρ est donné en fonction de r, et par suite de v, ces équations, dans lesquelles on considérera a, e, ω comme des constantes, donneront, soit par des quadratures, soit par des développements en séries, les nouvelles valeurs de ces quantités qui devront être introduites dans les équations du mouvement elliptique.

Considérons, en particulier, le cas où la densité du milieu est constante et où l'excentricité est assez petite pour qu'on puisse négliger e et e^2 devant l'unité; nous avons

$$da = -2\rho a^2 dv, \qquad de = -2\rho a\cos(v-\omega)dv,$$
$$e\,d\omega = -2\rho a\sin(v-\omega)dv, \qquad dn = 3\rho a n dv.$$

(1) Ces formules, ainsi qu'une autre qui donne la variation de la longitude de l'époque et que nous ne croyons pas devoir établir, sont dues à Poisson (*Traité de Mécanique*, t. I, p. 434), qui les a déduites de la méthode de la variation des constantes arbitraires. Nous avons reproduit l'analyse de l'illustre géomètre, en y apportant quelques simplifications, dans notre *Traité de Mécanique générale* (t. I, p. 159).

Si nous désignons par la caractéristique δ les parties variables des valeurs correspondantes, nous aurons, en intégrant,

$$\delta a = -2\rho a^2 v, \qquad \delta e = -2\rho a \sin(v-\omega),$$
$$e\,\delta\omega = 2\rho a \cos(v-\omega), \quad \delta n = 3\rho n v.$$

La résistance d'un milieu sur le mouvement d'une planète très peu excentrique aurait donc pour effet de faire décroître indéfiniment la distance moyenne, d'augmenter le mouvement moyen et de produire dans chacune des quantités e et ω une inégalité dont la période est la même que la révolution de cette planète. Le mouvement angulaire s'accélérerait de plus en plus, en même temps que la vitesse w, car on a très sensiblement $w = an = \frac{1}{\sqrt{a}}$. En vertu de la diminution de la distance moyenne a, qui s'élèverait à $4\pi\rho a^2$ à chaque révolution, la planète finirait nécessairement par atteindre la surface du Soleil. S'il existe dans l'espace un milieu très rare qui influe sur le mouvement des astres, c'est sur les comètes que cette influence peut être sensible, à cause de la petitesse de leur masse et parce que, toutes choses égales d'ailleurs, le coefficient ρ varie en raison inverse de la masse du mobile. On n'a reconnu jusqu'à présent aucune trace d'un pareil milieu sur le mouvement des comètes à retour périodique, à l'exception toutefois de celle de Encke, dont on explique quelques petites irrégularités en admettant l'existence d'un milieu interplanétaire très rare.

On peut expliquer la chute des aérolithes en supposant que, à une époque très reculée, ils circulaient autour de la Terre, comme des satellites, dans la partie la plus raréfiée de notre atmosphère ; la distance moyenne au centre de la Terre d'un aérolithe allant constamment en diminuant, et d'autant plus rapidement que la densité de l'air est plus grande, il arrive naturellement un moment où le mobile vient rencontrer la surface de la Terre. Si nous admettons que les aérolithes sont les fragments d'un satellite qui se serait brisé, ce sont les fragments les moins denses qui ont dû tomber les premiers sur la Terre.

§ II. — Expressions générales des variations des éléments du mouvement elliptique.

31. Les considérations géométriques que nous avons exposées dans le paragraphe précédent ne donnent qu'une première idée de la nature du problème des perturbations; mais les formules que nous en avons déduites ne sont pas suffisantes, puisqu'elles ne comprennent pas celles qui doivent donner les variations de l'inclinaison de l'orbite, de la position de la ligne des nœuds et d'autres éléments encore que nous rencontrerons dans ce qui suit; de plus, les formules dont il s'agit ne sont pas d'un usage commode lorsqu'on veut en faire l'application aux résultats de l'observation.

Il était réservé à Lagrange d'établir des formules complètes en même temps que simples, faisant connaître les valeurs des variations des éléments du mouvement elliptique en fonction de ces éléments et des dérivées par rapport aux mêmes éléments d'une fonction dite *perturbatrice*. Cette fonction n'est autre chose que le potentiel, rapporté à l'unité de masse de la planète qu'on considère, des actions exercées sur cette planète par les autres corps du système solaire.

La fonction perturbatrice peut être estimée en faisant abstraction des perturbations, ce qui revient à négliger les carrés des termes du même ordre de grandeur que les variations des éléments du mouvement elliptique.

Lagrange est arrivé à ces résultats en faisant l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires dont il est le créateur. Les longs développements de calculs par lesquels il a dû passer peuvent être notablement abrégés lorsqu'on fait intervenir, dans la solution du problème, les théorèmes de Jacobi et d'Hamilton, comme cela aura lieu dans ce qui suit.

Mais auparavant nous reprendrons la question du n° 2, en la résolvant au moyen de ces théorèmes, parce qu'en opérant ainsi nous établirons un certain nombre de formules intermédiaires qui nous seront plus loin d'une grande utilité.

32. **Application des théorèmes d'Hamilton et de Jacobi au mouvement des planètes autour du Soleil.** — Nous nous reporterons,

dans cette équation, au Titre I de l'Introduction et, pour éviter toute confusion, nous ferons suivre, entre les parenthèses de la lettre I, les numéros qui se rapportent à l'Introduction.

Nous ne ferons d'abord aucune hypothèse sur l'orientation des trois axes rectangulaires fixes menés par le centre du Soleil.

Nous avons

$$(1)\qquad \begin{cases} U = -\int \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{1}{r}, \\ T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2), \\ H = T - \frac{1}{r}. \end{cases}$$

Soient λ l'angle formé par r avec sa projection sur le plan xy et L l'angle compris sous cette projection et l'axe des x; on a

$$x = r\cos\lambda\cos L, \quad y = r\cos\lambda\sin L, \quad z = r\sin\lambda.$$

En posant

$$r' = \frac{dr}{dt}, \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt}, \quad L' = \frac{dL}{dt},$$

nous avons

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos\lambda\cos L - r\sin\lambda\cos L.\lambda' - r\cos\lambda\sin L.L', \\ y' &= r'\cos\lambda\sin L - r\sin\lambda\sin L.\lambda' + r\cos\lambda\cos L.L', \\ z' &= r'\sin\lambda + r\cos\lambda.\lambda'; \end{aligned}$$

d'où

$$(2)\qquad T = \frac{1}{2}[r'^2 + r^2(L'^2\cos^2\lambda + \lambda'^2)].$$

En nous reportant au n° (3, I) et suivants, nous prendrons

$$u_1 = r, \quad u_2 = L, \quad u_3 = \lambda,$$

d'où

$$u'_1 = r', \quad u'_2 = L', \quad u'_3 = \lambda'$$

et

$$(3)\qquad p_1 = \frac{dT}{du'_1} = r', \quad p_2 = \frac{dT}{du'_2} = r^2\cos^2\lambda L', \quad p_3 = \frac{dT}{du'_3} = r^2\lambda'.$$

L'expression (2) peut alors se mettre sous la forme

$$T = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2\cos^2\lambda} + \frac{p_3^2}{r^2}\right),$$

d'où

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2\cos^2\lambda} + \frac{p_3^2}{r^2}\right) - \frac{1}{r}, \tag{4}$$

et par suite

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dH}{du_1} = \dfrac{dH}{dr} = -\dfrac{1}{r^3}\left(\dfrac{p_2^2}{\cos^2\lambda} + p_3^2\right) + \dfrac{1}{r^2}, & \dfrac{dH}{dp_1} = p_1, \\ \dfrac{dH}{du_2} = \dfrac{dH}{dL} = 0, & \dfrac{dH}{dp_2} = \dfrac{p_2}{r^2\cos^2\lambda}, \\ \dfrac{dH}{du_3} = \dfrac{dH}{d\lambda} = \dfrac{p_2^2}{r^2}\dfrac{\sin\lambda}{\cos^3\lambda}, & \dfrac{dH}{dp_3} = \dfrac{p_3}{r^2}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Les formules (15) du n° (3, I) nous donnent alors

$$dt = -\frac{dp_1}{\dfrac{dH}{dr}} = \frac{dp_2}{0} = -\frac{r^2\cos^3\lambda\, dp_3}{p_2^2\sin\lambda} = \frac{dr}{p_1} = \frac{r^2\cos^2\lambda\, dL}{p_2} = \frac{r^2}{p_3}d\lambda. \tag{6}$$

En numérotant ces six valeurs de dt, le n° 2 nous donne

$$p_2 = \text{const.} = \gamma, \tag{\alpha}$$

et, si l'on égale entre eux les n^{os} 3 et 6, on trouve

$$p_3\, dp_3 = -\gamma^2\frac{\sin\lambda}{\cos^3\lambda}d\lambda;$$

d'où, en désignant par c^2 une constante,

$$p_3^2 = c^2 - \frac{\gamma^2}{\cos^2\lambda}. \tag{\beta}$$

Des n^{os} 5 et 6 on tire, en ayant égard à cette valeur,

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{c^2\cos^2\lambda - \gamma^2}} = \frac{\cos\lambda}{\gamma}dL,$$

et, en posant

$$\gamma = c\cos\varphi,$$

il vient

$$\frac{d\cot\varphi\tang\lambda}{\sqrt{1-\cot^2\varphi\tang^2\varphi}}=d\mathrm{L}$$

et enfin, en désignant par α une troisième constante,

$$\tang\lambda=\tang\varphi\sin(\mathrm{L}-\alpha); \tag{\gamma}$$

ce qui exprime que la trajectoire est comprise dans un plan et que ce plan est incliné de l'angle φ sur le plan $x\mathrm{M}y$, qu'il coupe suivant une droite (*ligne des nœuds*) faisant l'angle α avec l'axe des x.

Les trois intégrales ci-dessus ne sont autre chose que celles qui sont fournies par le principe des aires.

La variable L, n'entrant que par sa différentielle dans les équations (6) du mouvement, se trouvera toujours ajoutée à la constante $-\alpha$, et l'on a

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha}=-\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{L}};$$

mais, en vertu de la formule (19) du n° (4, I), on a aussi

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{L}}=\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{L}}=p_2=\gamma,$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha}=-\gamma. \tag{7}$$

Si l'on désigne par v l'anomalie vraie de la planète mesurée à partir du nœud, on a

$$\cos v=\cos\lambda\cos(\mathrm{L}-\alpha). \tag{\delta}$$

Considérons l'orbite dans son plan de manière à réduire à deux le nombre des coordonnées et à nous trouver dans le cas du n° (9, I). Si, dans l'expression (4) de H, on remplace L par v et λ par o, et que l'on désigne par

$$q_2=\frac{d\mathrm{T}}{dv'}=r^2v' \tag{\varepsilon}$$

ce que devient p_2, on trouve, en remarquant que p_3 est nul,

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{q_2^2}{r^2}\right)-\frac{1}{r}. \tag{4'}$$

et les équations (6) du mouvement se réduisent à

$$(6') \qquad dt = \frac{dp_1}{\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{q_2^2}{r^2}\right)} = \frac{dq_2}{0} = \frac{dv}{p_1} = \frac{r^2}{q_2}\,dv.$$

On tire d'abord de là

$$(\zeta) \qquad q_2 = \text{const.} = k,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation des aires, et l'on doit avoir

$$k = \frac{\gamma}{\cos\varphi}\ (^1).$$

D'après le principe des forces vives, H est une constante que nous représenterons par h, et l'équation (4') donne, en y faisant $q_2 = k$,

$$(\eta) \qquad p_1 = \sqrt{\frac{2}{r} + 2h - \frac{k^2}{r^2}}.$$

La formule (h) du n° (9, I) nous donne

$$V = f(p_1\,dr + q_2\,dv) = f p_1\,dr + kv,$$

d'où

$$(\theta) \qquad S = V - Ht = f p_1\,dr + kv - ht.$$

La valeur de v étant censée donnée par l'équation (δ), la fonction S se

---

(1) C'est ce qu'il est facile d'ailleurs de vérifier; en effet, en différentiant l'équation (δ) par rapport à t, on a

$$\sin v.v' = \sin\lambda\cos(L - \alpha).\lambda' + \cos\lambda\sin(L - \alpha).L'$$

ou, en ayant égard aux valeurs (3) et (ε),

$$\sin v.q_2 = \sin\lambda.p_3\cos(L - \alpha) + \frac{\sin(L - \alpha).p_2}{\cos\lambda}.$$

Pour $L - \alpha = 90^\circ$, les formules (γ) et (δ) donnent $\lambda = \varphi$, $v = 90^\circ$; et, en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve

$$q_2 = \frac{p_2}{\cos\varphi} \quad \text{ou} \quad k = \frac{\gamma}{\cos\varphi}.$$

trouvera exprimée au moyen des coordonnées r, L, λ et des trois constantes α, h, k. On a donc, en vertu des formules (36, I), pour les deux intégrales cherchées,

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{S}}{dk} = \varphi - \dfrac{d}{dk}\int p_1\,dr = \varphi_1, \\ \dfrac{d\mathrm{V}}{dh} = \quad \dfrac{d}{dh}\int p_1\,dr = t + l, \end{cases}$$

φ_1 et l étant deux nouvelles constantes.

Si nous choisissons pour limites inférieures des intégrales qui entrent dans ces formules, celle des deux racines de l'équation

$$p_1 = \frac{dr}{dt} = 0,$$

qui correspond à un minimum r_0 de r ou au périhélie, nous pourrons effectuer, dans les équations (6), les différentiations sous le signe de l'intégration, en remarquant que les termes $-\left(p_1\dfrac{dr}{dk}\right)_0$, $-\left(p_1\dfrac{dr}{dh}\right)_0$, résultant de la variation de la limite inférieure, sont nuls.

En nous rappelant que $\mathrm{V} = \mathrm{S} + ht$, les équations précitées se réduisent aux suivantes :

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{S}}{dk} = \varphi - \displaystyle\int_{r_0}^{r} k\,\frac{dr}{r^2 p_1} = \varphi_1, \\ \dfrac{d\mathrm{S}}{dh} = \displaystyle\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{p_1} = -l, \end{cases}$$

d'après lesquelles on voit que φ_1 représente la longitude du périhélie mesurée à partir du nœud ascendant et $-l$ l'époque du passage au périhélie.

La solution complète du problème sera donc donnée par les intégrales (8) et par l'intégrale (7), qui, en se reportant à la valeur (6), devient

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha} = k\,\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\gamma$$

ou, en ayant égard à la formule (5),

$$(9)\qquad \frac{k\cos\lambda\sin(\mathrm{L}-\alpha)}{\sin\varphi} = \gamma = k\cos\varphi.$$

33. **Théorie des perturbations.** — Pour simplifier les équations que nous avons à établir et dans lesquelles la masse m de la planète troublée entrerait en facteur commun, nous supposerons cette masse égale à l'unité, ce qui revient à ne faire intervenir dans le problème que la considération des accélérations.

Si l'on représente par R la fonction perturbatrice, nous aurons, pour le potentiel dans le moment troublé,

$$U = \frac{1}{r} + R$$

et, d'après le principe des forces vives, en désignant par h une constante,

$$T = \frac{1}{r} + R + h$$

ou

$$T - \frac{1}{r} = h + R. \tag{10}$$

Comme nous connaissons les intégrales de l'équation

$$T - \frac{1}{r} = h,$$

du mouvement non troublé, nous voyons que nous rentrons dans le cas du n° (**10**, I), en supposant $H_1 = h$, $H_2 = R$.

Si nous nous reportons aux équations (8) et (9) du numéro précédent, qui se rapportent au mouvement non troublé, et si nous attribuons successivement aux α du n° (**6**, I) les valeurs h, k, α, les valeurs correspondantes des α' de ce dernier numéro seront l, c_1, $-\gamma$, et les équations (37) du n° (**10**, I) nous donneront

$$\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{dR}{dl}, & \dfrac{dl}{dt} = \dfrac{dR}{dh}, \\ \dfrac{dk}{dt} = -\dfrac{dR}{dc_1}, & \dfrac{dc_1}{dt} = \dfrac{dR}{dk}, \\ \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{dR}{d\gamma}, & \dfrac{d\gamma}{dt} = -\dfrac{dR}{d\alpha}. \end{array}\right. \tag{11}$$

Nous devrons donc exprimer tous les éléments du mouvement elliptique en fonction des six variables h, k, α, l, c_1, γ.

Nous avons déjà, en remarquant qu'ici h est la moitié de la constante que nous avons représentée par la même lettre au n° 2,

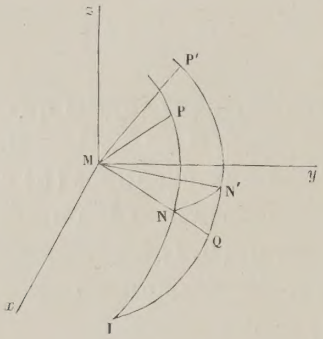
$$(a)\quad \begin{cases} h = -\dfrac{1}{2a}, \quad k = \sqrt{a(1-e^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{d'après le n° 2,} \\ n = a^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{» » 13,} \\ \varepsilon = nl + \omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{» » 15,} \\ k\cos\varphi = \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{» » 32.} \end{cases}$$

A ces équations, nous devrons en joindre une dernière que nous allons chercher à établir, dans laquelle devra se trouver la variable φ_1 qui n'entre dans aucune des précédentes.

Considérons les grands cercles déterminés, dans une sphère d'un rayon égal à l'unité ayant pour centre celui du Soleil, par les plans de deux orbites elliptiques consécutives; nous pourrons, par la pensée et uniquement au point de vue trigonométrique, substituer les deux grands cercles aux ellipses correspondantes.

Soient (*fig.* 3)

Fig. 3.



N, N′ deux positions consécutives du nœud ascendant de l'orbite;
P, P′ les périhélies correspondants;
I l'intersection des plans des deux orbites;
NQ l'élément du grand cercle passant par N et normal à IN′.

Nous avons

$$d\alpha = \mathrm{NN'},$$
$$\mathrm{IN'} - \mathrm{IN} = \mathrm{N'Q} = d\alpha\cos\varphi,$$
$$\mathrm{N'P'} - \mathrm{NP} = d\varphi_1,$$

et, si nous mesurons la longitude du périhélie à partir du point I,

$$d\omega = \mathrm{IP}' - \mathrm{IP} = \mathrm{N}'\mathrm{P}' - \mathrm{NP} + \mathrm{IN}' - \mathrm{IN}$$

ou

$$(b) \qquad d\omega = dv_1 + \cos\varphi\, d\alpha.$$

Cette relation, qui est celle qu'il s'agissait d'établir, aura encore lieu si l'on substitue au point I, comme origine de ω, un point quelconque de l'orbite IP, assujetti à cette condition que deux positions consécutives de ce point coïncident lorsqu'on rabattra l'un sur l'autre, autour de leur commune intersection, les plans des deux orbites.

Au moyen des relations (a) et (b), on arrive facilement à établir le Tableau suivant :

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{lllllll}
\dfrac{da}{dh} = 2a^2, & \dfrac{da}{dk} = 0, & \dfrac{da}{dl} = 0, & \dfrac{da}{dv_1} = 0, & \dfrac{da}{d\alpha} = 0, & \dfrac{da}{d\gamma} = 0, \\
\dfrac{dn}{dh} = -3an, & \dfrac{dn}{dk} = 0, & \dfrac{dn}{dl} = 0, & \dfrac{dn}{dv_1} = 0, & \dfrac{dn}{d\alpha} = 0, & \dfrac{dn}{d\gamma} = 0, \\
\dfrac{de}{dh} = \dfrac{a(1-e^2)}{e}, & \dfrac{de}{dk} = -\dfrac{an\sqrt{1-e^2}}{e}, & \dfrac{de}{dl} = 0, & \dfrac{de}{dv_1} = 0, & \dfrac{de}{d\alpha} = 0, & \dfrac{de}{d\gamma} = 0, \\
\dfrac{d\omega}{dh} = 0, & \dfrac{d\omega}{dk} = 1, & \dfrac{d\omega}{dl} = 0, & \dfrac{d\omega}{dv_1} = 1, & \dfrac{d\omega}{d\alpha} = \cos\varphi, & \dfrac{d\omega}{d\gamma} = 0, \\
\dfrac{d\varphi}{dh} = 0, & \dfrac{d\varphi}{dk} = \dfrac{an\cot\varphi}{\sqrt{1-e^2}}, & \dfrac{d\varphi}{dl} = 0, & \dfrac{d\varphi}{dv_1} = 0, & \dfrac{d\varphi}{d\alpha} = 0, & \dfrac{d\varphi}{d\gamma} = -\dfrac{an}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}, \\
\dfrac{d\varepsilon}{dh} = -3anl, & \dfrac{d\varepsilon}{dk} = 0, & \dfrac{d\varepsilon}{dl} = n, & \dfrac{d\varepsilon}{dv_1} = 0, & \dfrac{d\varepsilon}{d\alpha} = \cos\varphi, & \dfrac{d\varepsilon}{d\gamma} = 0, \\
\dfrac{d\alpha}{dh} = 0, & \dfrac{d\alpha}{dk} = 0, & \dfrac{d\alpha}{dl} = 0, & \dfrac{d\alpha}{dv_1} = 0, & \dfrac{d\alpha}{d\alpha} = 1, & \dfrac{d\alpha}{d\gamma} = 0.
\end{array}\right.$$

Soient p, q deux quelconques des cinq constantes a, e, ω, φ, ε, que nous substituerons à h, k, l, v_1, γ, la constante α étant la seule que nous conservions de celles qui entrent dans les équations (11). Nous aurons

$$(c) \qquad (p,q) = \frac{dp}{dl}\frac{dq}{dh} - \frac{dp}{dh}\frac{dq}{dl} + \frac{dp}{dv_1}\frac{dq}{dk} - \frac{dp}{dk}\frac{dq}{dv_1} + \frac{dp}{d\alpha}\frac{dq}{d\gamma} - \frac{dp}{d\gamma}\frac{dq}{d\alpha},$$

Il est facile de former, au moyen des valeurs (12), les expressions

suivantes :

$$
\begin{aligned}
(a, q) &= -2a^2 \frac{dq}{dl},\\
(e, q) &= -\frac{a(1-e^2)}{e}\frac{dq}{dl} + \frac{na\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dq}{dv_1},\\
(\omega, q) &= \frac{dq}{dk} + \frac{dq}{d\gamma}\cos\varphi,\\
(\varphi, q) &= -\frac{an\cot\varphi}{\sqrt{1-e^2}}\frac{dq}{dv_1} + \frac{an}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dq}{d\alpha},\\
(\varepsilon, q) &= 3anl\frac{dq}{dl} + n\frac{dq}{dh} + \frac{dq}{dk} + \frac{dq}{d\gamma}\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Nous avons par suite

$$
\begin{aligned}
&(a, e) = 0, \quad (a, \omega) = 0, \quad (a, \varphi) = 0, \quad (a, \alpha) = 0,\\
&(e, \varphi) = 0, \quad (e, \alpha) = 0, \quad (\omega, \varphi) = 0, \quad (\omega, \varepsilon) = 0,\\
&(\omega, \alpha) = 0, \quad (\varphi, \varepsilon) = 0, \quad (\varepsilon, \alpha) = 0,\\
&(a, \varepsilon) = -(\varepsilon, a) = -2a^2 n,\\
&(e, \omega) = -(\omega, e) = \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e},\\
&(e, \varepsilon) = -(\varepsilon, e) = \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right),\\
&(\varphi, \alpha) = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}.
\end{aligned}
$$

Au moyen de ces valeurs et de la formule (39′) du n° (**10**, I), on trouve

$$
(13)\quad
\left\{
\begin{aligned}
da &= -2a^2 n\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}dt,\\
de &= \frac{an}{e}\sqrt{1-e^2}\frac{d\mathrm{R}}{d\omega}dt + \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}dt,\\
d\omega &= -\frac{an}{e}\sqrt{1-e^2}\frac{d\mathrm{R}}{de}dt,\\
d\varphi &= -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathrm{R}}{d\alpha}dt,\\
d\varepsilon &= 2a^2 n\frac{d\mathrm{R}}{da}dt - \frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d\mathrm{R}}{de}dt,\\
d\alpha &= \frac{an}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}dt,
\end{aligned}
\right.
$$

Telles sont les équations que nous nous proposions d'établir et qui feront connaître les variations des éléments du mouvement elliptique quand nous aurons déterminé la forme de la fonction perturbatrice.

34. Variations de la longitude moyenne et du mouvement moyen. — Si l'on remplace nl par $\varepsilon - \omega$ dans les formules (28′) et (31′) du n° **15** qui donnent les expressions des coordonnées polaires du mouvement elliptique en fonction du temps, on voit que nt n'entre dans ces expressions qu'ajouté à ε et réciproquement. Il en sera par suite de même pour la fonction R, dont la dérivée partielle par rapport à ε sera alors égale à la dérivée partielle de la même fonction par rapport à nt. Nous avons ainsi

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\,dt = \frac{d\mathrm{R}}{d(nt)}\,dt = \frac{1}{n}\,d\mathrm{R},$$

la caractéristique d se rapportant à la différentielle de R relative au temps, mais prise en ne faisant varier t qu'autant qu'il est multiplié par n. Les valeurs de da et de peuvent ainsi se mettre respectivement sous les formes suivantes :

$$(14)\qquad \begin{cases} da = -2a^2\,d\mathrm{R}, \\ de = \dfrac{an}{e}\sqrt{1-e^2}\,\dfrac{d\mathrm{R}}{d\omega}\,dt + a\,\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e}\,(1-\sqrt{1-e^2})\,d\mathrm{R}. \end{cases}$$

De la relation $n = a^{-\frac{3}{2}}$ et de l'expression ci-dessus de da on tire

$$(15)\qquad dn = -\frac{3n}{2a}\,da = 3\,an\,d\mathrm{R},$$

d'où l'on déduira la valeur qu'il faut substituer à n dans les formules du mouvement elliptique.

Soit

$$\xi = nt + \varepsilon,$$

la longitude moyenne dont la détermination a été le principal objet du calcul de n; on a

$$d\xi = n\,dt + t\,dn + d\varepsilon,$$

expression dans laquelle il faudra substituer les valeurs de dn, $d\varepsilon$ trouvées plus haut.

Occupons-nous d'abord du terme de $d\varepsilon$ qui renferme $\frac{d\mathrm{R}}{da}$, et représentons par $\left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right)$ la dérivée partielle de R par rapport à l'arbitraire a, sans faire varier n qui est fonction de cette variable. Nous avons, eu égard aux relations établies plus haut,

$$\frac{d\mathrm{R}}{da}\,dt = \left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right)dt + \frac{d\mathrm{R}}{dn}\,\frac{dn}{da}\,dt$$
$$= \left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right)dt + t\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\,\frac{dn}{da}\,dt = \left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right)dt - \frac{3}{2}\,\frac{nt}{a}\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\,dt = \left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right)dt - \frac{3}{2}\,\frac{t}{a}\,d\mathrm{R}.$$

Le terme de $d\varepsilon$ dont il s'agit sera donc

$$2a^2 n\left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right) - 3ant\,d\mathrm{R} = 2a^2 n\left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right) - t\,dn.$$

Il résulte de là que, toutes substitutions faites, le terme $t\,dn$ introduit par la variation de n disparaîtra dans l'expression de $d\xi$.

Donc, *pour calculer la longitude moyenne, il suffira d'employer la formule*

$$d\xi = n\,dt + d\varepsilon, \tag{16}$$

dans laquelle on substituera à $d\varepsilon$ sa valeur obtenue en considérant n comme une constante.

En représentant par

$$\zeta = \int n\,dt$$

le mouvement moyen et remplaçant, dans son expression, n par l'intégrale de l'équation (15), on trouve pour la variation $\delta\zeta$ de ce mouvement

$$\delta\zeta = 3\int\int an\,dt\,d\mathrm{R}. \tag{17}$$

35. Expressions de $d\varphi$ et $d\varkappa$ lorsque l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe xy est très petite. — Les orbites des planètes sont généralement peu inclinées sur le plan de l'écliptique, qui lui-même se déplace, mais avec une grande lenteur.

Il est donc permis de choisir un plan fixe qui, pour une longue période, fasse avec les plans des orbites des angles très petits. Mais les

dénominateurs des valeurs de $d\varphi$ et $d\alpha$ fournies par les équations (13) sont eux-mêmes très petits, ce qui est un inconvénient; mais on y remédie en substituant à φ et α deux autres arbitraires p et q, données par

$$p = \operatorname{tang}\varphi \sin\alpha, \quad q = \operatorname{tang}\varphi \cos\alpha. \tag{18}$$

On déduit de là

$$\begin{cases} dp = \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\varphi}\, d\varphi + q\, d\alpha, \\ dq = \dfrac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi}\, d\varphi - p\, d\alpha. \end{cases} \tag{18'}$$

Mais, si l'on considère la fonction R comme ne dépendant que de φ et α ou de p et q, sa différentielle totale a la même valeur dans les deux cas, de sorte que l'on a

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}\, d\varphi + \frac{d\mathrm{R}}{d\alpha}\, d\alpha = \frac{d\mathrm{R}}{dp}\, dp + \frac{d\mathrm{R}}{dq}\, dq.$$

En substituant dans cette identité les valeurs ci-dessus de dp et dq et identifiant les coefficients des termes en $d\varphi$ et $d\alpha$ qui se trouvent dans l'un et l'autre membre, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{R}}{d\varphi} &= \frac{\sin\alpha}{\cos^2\varphi}\,\frac{d\mathrm{R}}{dp} + \frac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi}\,\frac{d\mathrm{R}}{dq}, \\ \frac{d\mathrm{R}}{d\alpha} &= q\,\frac{d\mathrm{R}}{dp} - p\,\frac{d\mathrm{R}}{dq}. \end{aligned}$$

La quatrième et la sixième des équations (13) deviennent alors, en supposant $\cos\varphi = 1$, ou que l'angle φ est assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré,

$$\begin{aligned} d\varphi &= -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\left(q\,\frac{d\mathrm{R}}{dp} - p\,\frac{d\mathrm{R}}{dq}\right) dt, \\ d\alpha &= \frac{an}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\left(\sin\alpha\,\frac{d\mathrm{R}}{dp} + \cos\alpha\,\frac{d\mathrm{R}}{dq}\right) dt. \end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les formules (18'), on trouve, au

degré d'approximation convenu,

$$dp = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}(p\sin\alpha + q\cos\alpha)\frac{d\mathrm{R}}{dq}dt,$$

$$dq = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}(p\sin\alpha + q\cos\alpha)\frac{d\mathrm{R}}{dp}dt$$

et enfin, en ayant égard aux relations (18′),

$$(19)\qquad \begin{cases} dp = \dfrac{an}{\sqrt{1-e^2}}\dfrac{d\mathrm{R}}{dq}dt, \\ dq = -\dfrac{an}{\sqrt{1-e^2}}\dfrac{d\mathrm{R}}{dp}dt. \end{cases}$$

Ces formules, substituées à celles du groupe (13) qui leur correspondent, offrent sur ces dernières, comme nous le reconnaîtrons plus loin, l'avantage de réduire à la forme linéaire, avec des coefficients constants, les équations différentielles qui déterminent l'inclinaison et la longitude du nœud d'un certain nombre d'orbites, ce qui permettra d'effectuer facilement les intégrations.

En supposant que les parties variables δp et δq de p et q aient été ainsi obtenues, les formules

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{p^2+q^2},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{p}{q}$$

feront connaître les valeurs

$$(20)\qquad \begin{cases} \delta\varphi = \dfrac{p\,\delta p + q\,\delta q}{(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}(1+p^2+q^2)}, \\ \delta\alpha = \dfrac{q\,\delta p - p\,\delta q}{p^2+q^2} \end{cases}$$

des variations de φ et α.

L'équation (b) du n° 33 devient, toujours au même degré d'approximation,

$$(21)\qquad d\omega = d\varphi_1 + d\alpha.$$

Si nous prenons pour origine de φ_1 et ω la droite avec laquelle coïnciderait l'origine de α en rabattant autour de la ligne des nœuds le

plan de l'orbite sur le plan fixe, ou, autrement, la projection sur le plan de l'orbite de la droite à partir de laquelle on mesure α, l'équation précédente donne

$$\omega = v_1 + \alpha. \tag{22}$$

36. Expressions des variations de α, φ, ε lorsque l'excentricité de l'orbite est petite. — Nous avons vu que c'est le cas général, et à ce sujet nous avons à faire quelques observations sur le mode d'application de la deuxième, de la troisième et de la cinquième des formules du groupe (13). En développant en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de e^2 les radicaux des seconds termes des expressions de de et $d\varepsilon$, on voit que le dénominateur e disparaît et il ne se présente alors aucune difficulté.

Il nous reste à considérer le premier terme de de et la valeur de $d\omega$, en d'autres termes à poser

$$\begin{cases} de = \dfrac{an}{e}\sqrt{1-e^2}\,\dfrac{d\mathrm{R}}{d\omega}\,dt, \\ d\omega = -\dfrac{an}{e}\sqrt{1-e^2}\,\dfrac{d\mathrm{R}}{de}\,dt. \end{cases} \tag{23}$$

La présence du dénominateur très petit e, dans ces deux expressions, est embarrassante et, pour éviter toute difficulté à ce sujet, nous substituerons à e et ω deux autres arbitraires b et c définies par

$$b = e\sin\omega, \quad c = e\cos\omega, \tag{24}$$

d'où

$$db = \sin\omega\,de + e\cos\omega\,d\omega, \quad dc = \cos\omega\,de - e\sin\omega\,d\omega; \tag{24'}$$

mais nous avons

$$\frac{d\mathrm{R}}{de}\,de + \frac{d\mathrm{R}}{d\omega}\,d\omega = \frac{d\mathrm{R}}{db}\,db + \frac{d\mathrm{R}}{dc}\,dc,$$

et, en portant dans cette équation les valeurs (24'), puis identifiant de part et d'autre les coefficients de de et $d\omega$, il vient

$$\frac{d\mathrm{R}}{de} = \frac{d\mathrm{R}}{db}\sin\omega + \frac{d\mathrm{R}}{dc}\cos\omega, \quad \frac{d\mathrm{R}}{d\omega} = \left(\frac{d\mathrm{R}}{db}\cos\omega - \frac{d\mathrm{R}}{dc}\sin\omega\right)e;$$

si l'on substitue ces expressions dans les formules (23), on trouve

$$de = an\sqrt{1-e^2}\left(\frac{d\mathrm{R}}{db}\cos\omega + \frac{d\mathrm{R}}{dc}\sin\omega\right)dt,$$
$$d\omega = -an\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{d\mathrm{R}}{db}\sin\omega - \frac{d\mathrm{R}}{dc}\cos\omega\right)dt,$$

et les équations (24'), en remarquant que $e^2 = b^2 + c^2$, donnent, par suite,

$$(25)\qquad \begin{cases} db = -an\sqrt{1-b^2-c^2}\,\dfrac{d\mathrm{R}}{dc}\,dt, \\ dc = an\sqrt{1-b^2-c^2}\,\dfrac{d\mathrm{R}}{db}\,dt. \end{cases}$$

Supposons que l'on puisse effectuer les intégrations et déterminer ainsi les variations δb et δc; des relations

$$b^2 + c^2 = e^2, \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{b}{c},$$

on déduira

$$\delta e = \frac{b\,\delta b + c\,\delta c}{e} = \frac{b\,\delta b + c\,\delta c}{\sqrt{b^2+c^2}},$$
$$(26)\qquad \delta\omega = \frac{c\,\delta b - b\,\delta c}{b^2+c^2}.$$

Mais la valeur ci-dessus de δe est incomplète, puisque dans de nous avons fait abstraction du terme en $\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}$. On devra donc prendre

$$(27)\qquad \delta e = \frac{b\,\delta b + c\,\delta c}{\sqrt{b^2+c^2}} + \delta\int\frac{an\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\,dt.$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à déterminer la forme de la fonction perturbatrice R, et c'est de quoi nous allons maintenant nous occuper.

§ III. — Développement en série trigonométrique de la fonction perturbatrice.

37. Expression de la fonction perturbatrice. — Soient

m, m', m'', ... les masses des différentes planètes du système solaire rapportées à la masse M du Soleil prise pour unité;

Mx, My, Mz trois axes rectangulaires de directions fixes ayant pour origine le centre du Soleil;

x, y, z les coordonnées de la masse m et r sa distance à l'origine M;

ρ', ρ'', ρ''', ... les distances de m à m', m'', m''', ...

Pour obtenir les équations du mouvement relatif des planètes par rapport au Soleil, il faut concevoir que l'on imprime à tout le système solaire une vitesse et une accélération égales et contraires à celles du Soleil, qui se trouvera ainsi ramené au repos.

L'accélération de M est la résultante des accélérations $\frac{m}{r^2}$, $\frac{m'}{r'^2}$, ... dirigées de M vers m, m', ...; celle de m se compose des suivantes : $\frac{1}{r^2}$, $\frac{m'}{\rho'^2}$, $\frac{m''}{\rho''^2}$, ..., qui sont respectivement dirigées de m vers M, m', m'', ...

L'équation du mouvement de m estimé parallèlement à Mx est donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r^3}(1+m) - \frac{m'}{r'^2}\frac{x'}{r'} + \frac{m'}{\rho'^2}\frac{x'-x}{\rho'} - \frac{m''}{r''^2}\frac{x''}{r''} + \frac{m'}{\rho''^2}\frac{x''-x}{\rho''} - \dots$$

Si nous remarquons que m est négligeable devant l'unité, que

$$\rho' = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}, \quad \rho'' = \sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2-(z''-z)^2}, \quad \dots,$$

et si nous posons

$$(1)\quad \begin{cases} \mathrm{R} = m'\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right) + m''\left(\frac{1}{\rho''} - \frac{xx''+yy''+zz''}{r''^3}\right) + \dots \\ \quad = \sum m'\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right), \end{cases}$$

il est facile de voir que l'équation précédente peut se mettre sous cette

forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r^3} + \frac{d\mathrm{R}}{dx}.$$

Si R est nul, on obtient une des équations du mouvement elliptique, et par suite R n'est autre chose que la fonction perturbatrice.

Il résulte de la forme linéaire des équations (13) du n° 33 et de la forme de l'expression de R, que la variation de chacun des éléments du mouvement elliptique de la planète troublée m est la somme de celles que l'on obtient en considérant séparément chacune des planètes perturbatrices.

On est donc ramené au cas d'une seule planète perturbatrice m', ou à poser simplement

$$\mathrm{R} = m'\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right). \tag{2}$$

38. Développement de la fonction perturbatrice dans l'hypothèse d'orbites peu inclinées et d'une faible excentricité. — Soient ι, ι' les projections de r, r' sur le plan xy; L, L' les angles qu'elles forment avec l'axe des x. On a

$$\rho' = \sqrt{\iota^2 - 2\iota\iota'\cos(\mathrm{L}' - \mathrm{L}) + \iota'^2 + (z' - z)^2}, \qquad x = \iota\cos\mathrm{L}, \qquad y = \iota\sin\mathrm{L},$$
$$r' = \sqrt{\iota'^2 + z'^2}, \qquad x' = \iota'\cos\mathrm{L}', \qquad y' = \iota'\sin\mathrm{L}',$$

par suite

$$\mathrm{R} = m'\left[\frac{1}{\sqrt{\iota^2 - 2\iota\iota'\cos(\mathrm{L}' - \mathrm{L}) + \iota'^2 + (z' - z)^2}} - \frac{\iota\iota'\cos(\mathrm{L}' - \mathrm{L}) + zz'}{(\iota'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Les valeurs de ι, ι', L, L', z, z' ne diffèrent de celles qui résultent du mouvement elliptique que de quantités de l'ordre des masses m', m'', m''', ...; mais, comme l'expression de R est affectée du coefficient m' et que l'on peut négliger les produits deux à deux des masses perturbatrices, nous supposerons que les valeurs ci-dessus, introduites dans R, se rapportent au mouvement elliptique.

Comme nous l'avons fait remarquer au n° 35, on peut choisir le plan xy de telle manière qu'il comprenne de petits angles avec les plans des orbites elliptiques; la fonction R est alors développable en série

ordonnée, suivant les puissances ascendantes de z, z', ce qui donne

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{R}{m'} = {} & \frac{1}{\sqrt{v^2 - 2vv'\cos(L'-L)+v'^2}} - \frac{v}{v'^2}\cos(L'-L) - \frac{zz'}{v'^3} \\ & + \frac{3}{2}\frac{vz'^2\cos(L'-L)}{v'^4} - \frac{(z-z')^2}{2\left[v^2 - 2vv'\cos(L'-L)+v'^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \dots.\end{aligned}\right.$$

Soient

a, a' les distances moyennes des planètes m, m' au Soleil;

ε, ε' les longitudes de l'époque de ces planètes, mesurées à partir de l'axe des x, en supposant (n° 35) que les plans des orbites soient rabattus sur le plan xy, en les faisant tourner autour de leurs lignes des nœuds respectives;

n, n' les vitesses angulaires moyennes de m, m' autour du Soleil.

Posons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & v = a(1+\sigma), \qquad v' = n'(1+\sigma'), \\ & L = nt + \varepsilon + \chi, \quad L' = n't + \varepsilon' + \chi', \\ & \theta = n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon, \\ & (a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \cos i\theta, \\ & (a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients A, B ne sont autre chose que ce que deviennent les coefficients des n^{os} (17, I) et (18, I) dans l'hypothèse de $\nu = \frac{1}{2}$.

Le développement (3) prend alors la forme suivante :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{R}{m'} = {} & \frac{1}{\left[a'^2(1+\sigma')^2 - 2a'(1+\sigma')a(1+\sigma)\cos(\theta+\chi'-\chi) + a^2(1+\sigma)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ & - \frac{a(1+\sigma)}{a'^2(1+\sigma')^2}\cos(\theta+\chi'-\chi) - \frac{zz'}{a'^3(1+\sigma')^3} + \frac{3}{2}\frac{a(1+\sigma)}{a'^4(1+\sigma')^4}\cos(\theta+\chi'-\chi) \\ & - \frac{(z'-z)^2}{2\left[a'^2(1+\sigma'^2) - 2a'(1+\sigma')a(1+\sigma)\cos(\theta+\chi'-\chi) + a^2(1+\sigma)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \dots.\end{aligned}\right.$$

Les quantités σ, σ', $\chi'-\chi$, qui ne dépendent que des excentricités et inclinaisons des orbites, seront généralement petites, et chacun des

termes dont se compose $\frac{R}{m'}$ pourra par suite se développer en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de ces quantités.

L'un des termes à développer sera de la forme

$$\begin{aligned} & f[a(1+\sigma),\ a'(1+\sigma'),\ \theta+\chi'-\chi] \\ &= f(a', a, \theta) + \frac{df}{da}a\sigma + \frac{df}{da'}a'\sigma + \frac{df}{d\theta}(\chi'-\chi) \\ &\quad + \frac{d^2f}{da\,da'}aa'\sigma\sigma' + \frac{d^2f}{da\,d\theta}a\sigma(\chi'-\chi) + \frac{d^2f}{da'\,d\theta}a'\sigma'(\chi'-\chi) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{da^2}a^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{da'^2}a'^2\sigma'^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{d\theta^2}(\chi'-\chi)^2 + \dots, \end{aligned}$$

et, en partant de là, il est facile d'arriver à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{R}{m'} = & \sum\left(A_i + \frac{dA_i}{da}a\sigma + \frac{dA_i}{da'}a'\sigma' \right. \\ & \left. + \frac{d^2A_i}{da\,da'}aa'\sigma\sigma' + \frac{1}{2}\frac{d^2A_i}{da^2}a^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\frac{dA_i}{da'^2}a'^2\sigma'^2 + \dots\right)\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & - (\chi'-\chi)\sum\left(A_i + \frac{dA_i}{da}a\sigma + \frac{dA_i}{da'}a'\sigma' + \dots\right) i\sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & - \frac{(\chi'-\chi)^2}{2}\sum i^2 A_i \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & - \frac{a}{a'^2}[1 + \sigma - 2\sigma' - 2\sigma\sigma' + 3\sigma'^2 - \tfrac{1}{2}(\chi'-\chi)^2]\cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & + \frac{a}{a'^2}(1 + \sigma - 2\sigma' + \dots)(\chi'-\chi)\sin(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & - \frac{zz'}{a'^3}(1 - 3\sigma' + 6\sigma'^2 + \dots) \\ & + \frac{3}{2}\frac{az'^2}{a'^4}\left[1 + \sigma - 4\sigma' + 10\sigma'^2 + \dots - \frac{(\chi'-\chi)^2}{2} + \dots\right]\cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & - \frac{3}{2}\frac{az'^2}{a'^4}(1 + \sigma - 4\sigma' + \dots)(\chi'-\chi)\sin(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & - \frac{(z'-z)^2}{2}\sum\left(B_i + \frac{dB_i}{da}a\sigma + \frac{dB_i}{da'}a'\sigma' + \frac{d^2B_i}{da\,da'}aa'\sigma\sigma' \right. \\ & \qquad \left. + \frac{1}{2}\frac{d^2B_i}{da^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2B_i}{da'^2}a'^2\sigma'^2 + \dots\right)\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & + \frac{(z'-z)^2(\chi'-\chi)}{2}\sum\left(B_i + \frac{dB_i}{da}a\sigma + \frac{dB_i}{da'}a'\sigma' + \dots\right) i\sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & - \frac{(z'-z)^2(\chi'-\chi)}{4}\sum i^2 B_i \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6}$$

En remplaçant dans cette expression σ, χ, z, σ', χ', z' par leurs valeurs en séries de termes périodiques en nt, $n't$ déduites du mouvement elliptique, la fonction R se trouvera développée en une suite de termes de la forme

$$m' \mathrm{J} \cos(i' n' t - int + j),$$

où J et j sont des fonctions des éléments elliptiques des planètes m et m', indépendantes du temps, et i', i deux nombres entiers qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles entre zéro et l'infini.

A chacun de ces termes, en se reportant à la formule (13) du n° 33, correspondront des inégalités des éléments du mouvement elliptique, qui seront périodiques, sauf dans le cas où i' et i seront simultanément nuls; dans ce cas, les inégalités sont dites *séculaires*, et méritent d'être étudiées d'une manière spéciale, comme nous le ferons plus loin, car ce sont celles qui frappent le plus les yeux de l'observateur. Les inégalités périodiques ne sont en quelque sorte que passagères et ont par suite peu d'importance en Astronomie; d'ailleurs, on pourra toujours les calculer en considérant comme constants les coefficients des termes correspondants de R, approximation qui est bien suffisante pour un grand nombre de siècles avant ou après l'époque prise pour origine du temps.

39. Nous allons chercher à effectuer complètement les calculs dans le cas où les excentricités et les inclinaisons des orbites sont assez petites pour qu'on puisse négliger celles de leurs puissances qui sont supérieures à la seconde.

La formule (6) se réduit à la suivante :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{R}}{m'} = &- \frac{zz'}{a'^3} + \left\{ - \frac{a}{a'^2}\left[1 + \sigma - 2\sigma' - 2\sigma\sigma' + 3\sigma'^2 - \frac{(\chi' - \chi)^2}{2} \right] + \frac{3}{2}\frac{a z'^2}{a'^4} \right\} \\
&\qquad \times \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\
&+ \frac{a}{a'^2}(1 + \sigma - 2\sigma')(\chi' - \chi)\sin(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\
&+ \sum \left[\mathrm{A}_i + \frac{d\mathrm{A}_i}{da} a\sigma + \frac{d\mathrm{A}_i}{da'} a'\sigma' + \frac{d^2\mathrm{A}_i}{da\, da'} aa'\sigma\sigma' + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{A}_i}{da^2} a^2\sigma^2 \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{A}_i}{da'^2} a'^2\sigma'^2 - \frac{(\chi' - \chi)^2}{2} i^2 \mathrm{A}_i - \frac{(z - z')^2}{2}\mathrm{B}_i \right] \\
&\qquad \times \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\
&- (\chi' - \chi)\sum \left(\mathrm{A}_i + \frac{d\mathrm{A}_i}{da} a\sigma + \frac{d\mathrm{A}_i}{da'} a'\sigma' \right) i \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).
\end{aligned}
\right.
$$

Nous attribuerons, en ce qui concerne la planète m, aux lettres λ, L, α la même signification qu'au n° **17**; mais nous conviendrons de mesurer l'anomalie vraie φ à partir de l'axe des x, après le rabattement du plan de l'orbite sur le plan fixe xy, au lieu de l'estimer par rapport au nœud, ce qui revient à remplacer, dans les formules (a) et (b_1) du numéro précité, φ par $\varphi - \alpha$, en substituant aussi λ à θ_0 (n° **32**). Nous avons ainsi

$$\tang(L - \alpha) = \cos\varphi \tang(\varphi - \alpha),$$

$$\cos\lambda = \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos(L - \alpha)}.$$

Si nous posons

$$L = \varphi + \delta L,$$

δL sera une quantité du second ordre en φ, et la première des formules précédentes donne

$$\delta L = -\tfrac{1}{4}\tang^2\varphi \sin 2(\varphi - \alpha),$$

en remarquant que l'on doit prendre $\cos\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}\tang^2\varphi$.

Nous avons donc

$$(a) \qquad L = \varphi - \tfrac{1}{4}\tang^2\varphi \sin 2(\varphi - \alpha),$$

puis

$$(b) \qquad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha) - \sin(\varphi - \alpha)\,\delta L} \\ \qquad = 1 + \tang(\varphi - \alpha)\,\delta L = 1 - \tfrac{1}{2}\tang^2\varphi \sin^2(\varphi - \alpha) \end{cases}$$

et enfin

$$(c) \qquad r = r\cos\lambda = r\left[1 - \tfrac{1}{2}\tang^2\varphi \sin^2(\varphi - \alpha)\right];$$

mais les équations $(28')$ et $(31')$ du n° **15** nous donnent, en y remplaçant nl par $(\varepsilon - \omega)$,

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos(nt + \varepsilon - \omega) - \frac{e^2}{2}\left[\cos 2(nt + \varepsilon - \omega) - 1\right],$$

$$\varphi = nt + \varepsilon + 2e\sin(nt + \varepsilon - \omega) + \tfrac{5}{4}e^2 \sin 2(nt + \varepsilon - \omega).$$

En substituant ces valeurs dans les formules (c) et (a), on trouve, au

degré d'approximation convenu,

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{r}{a} = 1 - e\cos(nt+\varepsilon-\omega) \\ \qquad - \dfrac{e^2}{2}[\cos 2(nt+\varepsilon-\omega)-1] - \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\varphi\sin^2(nt+\varepsilon-\alpha), \\ \mathrm{L} = nt+\varepsilon+2e\sin(nt+\varepsilon-\omega) \\ \qquad + \frac{5}{4}e^2\sin 2(nt+\varepsilon-\omega) - \frac{1}{4}\operatorname{tang}^2\varphi\sin 2(nt+\varepsilon-\alpha). \end{cases}$$

Si l'on compare ces valeurs à celles qui leur correspondent dans les équations (4), on a

$$(9)\quad \begin{cases} \sigma = -e\cos(nt+\varepsilon-\omega) \\ \qquad - \dfrac{e^2}{2}[\cos 2(nt+\varepsilon-\omega)-1] - \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\varphi\sin^2(nt+\varepsilon-\alpha), \\ \chi = 2e\sin(nt+\varepsilon-\omega) \\ \qquad + \frac{5}{4}e^2\sin 2(nt+\varepsilon-\omega) - \frac{1}{4}\operatorname{tang}^2\varphi\sin 2(nt+\varepsilon-\alpha). \end{cases}$$

On peut substituer aux variables φ et α celles p et q du n° 24, données par

$$p = \operatorname{tang}\varphi\sin\alpha, \quad q = \operatorname{tang}\varphi\cos\alpha,$$

d'où

$$(10)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \sqrt{p^2+q^2}, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{p}{q}.$$

Les équations (9) deviennent alors

$$(9')\quad \begin{cases} \sigma = -e\cos(nt+\varepsilon-\omega) + \dfrac{e^2}{2}[1-\cos 2(nt+\varepsilon-\omega)] \\ \qquad - \frac{1}{2}[p^2+q^2+(p^2-q^2)\cos 2(nt+\varepsilon) - 2\sin 2(nt+\varepsilon)pq], \\ \chi = 2e\sin(nt+\varepsilon-\omega) + \frac{5}{4}e^2\sin 2(nt+\varepsilon-\omega) \\ \qquad - \frac{1}{4}[(q^2-p^2)\sin 2(nt+\varepsilon) - 2pq\cos 2(nt+\varepsilon)]. \end{cases}$$

On a, pour l'équation du plan de l'orbite de la planète m,

$$z = qy - px\ (^1);$$

(1) Soit en effet P la longueur de la perpendiculaire abaissée du pied de l'ordonnée z sur la ligne des nœuds; on a

$$z = \mathrm{P}\operatorname{tang}\varphi, \quad \mathrm{P} = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

mais, comme R ne renferme que des termes du second ordre en z et z', on peut remplacer, dans l'expression de z, les coordonnées x, y par leurs valeurs approximatives indépendantes de l'excentricité et de l'inclinaison, ou poser

$$x = a\cos(nt+\varepsilon), \quad y = a\sin(nt+\varepsilon),$$

d'où

$$z = a[q\sin(nt+\varepsilon) - p\cos(nt+\varepsilon)]. \tag{11}$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à substituer les valeurs (9) et (11) et leurs analogues relatives à m' dans l'équation (7), sans perdre de vue le degré d'approximation convenu, et à remplacer les coefficients A et B par leurs valeurs P et Q déduites des n^{os} (17 et 18, I), pour $\nu = \frac{1}{2}$.

Nous nous bornerons à calculer le terme R_0 de R indépendant du temps, qui, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, est le seul qui présente de l'intérêt au point de vue astronomique, puisque c'est celui qui se rapporte aux inégalités séculaires.

Il est facile de s'assurer que le premier terme de l'expression (7) est périodique et qu'il doit par conséquent être mis de côté.

La constante du groupe de termes suivant ne peut résulter que des termes en $\sigma\sigma'$ et $\chi\chi'$, et l'on trouve qu'elle a pour valeur

$$-\frac{1}{2}\frac{a}{a'^2}ee'\cos(\omega'-\omega).$$

La constante du second groupe ne peut dépendre que des termes en $\sigma\chi'$, $\sigma'\chi$, et l'on reconnaît qu'elle est égale et de signe contraire à la précédente, avec laquelle elle donne ainsi un résultat nul.

---

d'où, par l'élimination de P,

$$z = y\,\mathrm{tang}\varphi\cos\alpha - x\,\mathrm{tang}\varphi\sin\alpha = qy - px.$$

Les équations de la perpendiculaire au plan étant

$$z = -\frac{y}{\mathrm{tang}\varphi\cos\alpha}, \qquad z = \frac{x}{\mathrm{tang}\varphi\sin\alpha},$$

on a

$$\cos(\mathrm{P},y) = -\mathrm{tang}\varphi\cos\alpha\cos\varphi = -\sin\varphi\cos\alpha, \quad \cos(\mathrm{P},x) = \sin\varphi\sin\alpha,$$

ce qui définit les inclinaisons du plan de l'orbite sur les plans zx et zy.

Le terme constant du troisième groupe a pour valeur

$$A_0+\left(a\frac{dA_0}{da}+\tfrac{1}{2}a^2\frac{d^2A_0}{da^2}\right)\frac{e^2}{2}+\left(a'\frac{dA_1}{da'}+\tfrac{1}{2}a^2\frac{d^2A_0}{da'^2}\right)\frac{e'^2}{2}$$
$$-\tfrac{1}{8}a\frac{dA_0}{da}(p^2+q^2)-\tfrac{1}{4}a^2\frac{dA_0}{da'}(p'^2+q'^2)+\frac{1}{4}\frac{d^2A_0}{da\,da'}aa'ee'\cos(\omega'-\omega)$$
$$+A_1ee'\cos(\omega'-\omega)-\frac{B_0}{4}[a^2(p^2+q^2)+a'^2(p'^2+q'^2)]+\frac{B_1}{4}aa'(pp'+qq').$$

Enfin on a, pour la constante du dernier groupe,

$$\left(a\frac{dA_1}{da}+a'\frac{dA_1}{da}\right)\frac{ee'\cos(\omega'-\omega)}{2}$$

Il vient ainsi

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{R_0}{m'}=A_0&+\left(a\frac{dA_0}{da}+\tfrac{1}{2}a^2\frac{d^2A_0}{da^2}\right)\frac{e^2}{2}+\left(a'\frac{dA_0}{da'}+\tfrac{1}{2}a^2\frac{d^2A_0}{da'^2}\right)\frac{e'^2}{2}\\&+\left(2A_1+a\frac{dA_1}{da}+a'\frac{dA_1}{da'}+\tfrac{1}{2}aa'\frac{d^2A_0}{da\,da'}\right)\frac{ee'}{2}\cos(\omega'-\omega)\\&-\frac{1}{8}\left(a\frac{dA_0}{da}+a^2B_0\right)(p^2+q^2)-\frac{1}{8}\left(a'\frac{dA_0}{da'}+a'^2B_0\right)(p'^2+q'^2)\\&+\frac{aa'B_1}{4}(pp'+qq').\end{aligned}\right.$$

Nous allons maintenant chercher à exprimer la fonction R_0 uniquement au moyen de A_0 et A_1.

Reportons-nous à cet effet aux n^{os} **17** à **20** de l'Introduction, où nous ferons $\nu=\frac{1}{2}$, $P_0=A_0$, $P_1=A_1$, $Q_0=B_0$, $Q_1=B_1$. Les formules (f, I), (g, I) donnent, en y faisant respectivement $i=0$, $i=1$,

$$(\alpha)\qquad\frac{dA_0}{da}=\frac{aA_0-a'A_1}{a'^2-a^2},$$

$$(\alpha')\qquad\frac{dA_1}{da}=\frac{a'}{a}\frac{dA_0}{da}.$$

En différentiant la première de ces formules, puis en y ayant égard ainsi qu'à la seconde, on trouve

$$\frac{d^2A_0}{da^2}=\frac{2a^2A_0+\dfrac{a'}{a}(a'^2-3a^2)A_1}{(a'^2-a^2)^2}.$$

On déduit de là, pour le coefficient du terme en e^2 de R_0,

$$(A)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(a\frac{dA_0}{da}+\frac{a^2}{2}\frac{d^2A_0}{da^2}\right)=\frac{1}{4}\frac{d}{da}\left(a^2\frac{dA_0}{da}\right) \\ \qquad\qquad =\frac{aa'}{4(a'^2-a^2)^2}[2aa'A_0-(a'^2+a^2)A_1]; \end{cases}$$

ce coefficient sera également celui de e'^2, puisqu'il est symétrique en a et a'.

Occupons-nous maintenant du coefficient de $ee'\cos(\omega'-\omega)$. Comme la formule (h, I) nous donne

$$(\beta)\qquad a\frac{dA_1}{da}+a'\frac{dA_1}{da'}=-A_1,$$

ce coefficient se réduit à

$$\frac{1}{2}\left(A_1+\frac{1}{2}aa'\frac{d^2A_1}{da\,da'}\right)$$

et l'on n'a ainsi qu'à chercher l'expression de $\frac{d^2A_1}{da\,da'}$.

De la formule (α') on déduit

$$\frac{d^2A_1}{da\,da'}=\frac{1}{a}\frac{dA_0}{da}+\frac{a'}{a}\frac{d^2A_0}{da\,da'}.$$

La formule (α) donne

$$\frac{d^2A_0}{da\,da'}=\frac{1}{a'^2-a^2}\left(a\frac{dA_0}{da'}-A_1-a'\frac{dA_1}{da'}\right)-\frac{2a'}{(a'^2-a^2)^2}(aA_0-a'A_1).$$

D'autre part, on déduit de la formule (h, I) du n° 20 de l'Introduction

$$\frac{dA_0}{da'}=-\frac{a}{a'}\frac{dA_0}{da}-\frac{A_0}{a'}$$

et

$$\frac{dA_1}{da'}=-\frac{a}{a'}\frac{dA_1}{da}-\frac{A_1}{a'}$$

ou, en vertu de la relation (α'),

$$\frac{dA_1}{da'}=-\frac{dA_0}{da}-\frac{A_1}{a'}.$$

Nous avons donc

$$\frac{d^2 A_0}{da\,da'} = \frac{1}{a'}\frac{dA_0}{da} - \frac{a}{a'}\frac{A_0}{(a'^2-a^2)^2} - \frac{2a'}{(a'^2-a^2)^2}(aA_0 - a'A_1);$$

par suite

$$\frac{d^2 A_0}{da\,da'} = \frac{2}{a}\frac{dA_0}{da} - \frac{A_0}{a'^2-a^2} - \frac{2a'^2}{a(a'^2-a^2)^2}(aA_0 - a'A_1).$$

Il ne nous reste plus qu'à substituer dans cette dernière expression la valeur (α) de $\frac{dA_0}{da}$ et, après quelques réductions, on trouve

$$\frac{d^2 A_0}{da\,da'} = -\frac{(a'^2+a^2)A_0}{(a'^2-a^2)^2} + \frac{2aa'A_1}{(a'^2-a^2)^2}.$$

Nous avons donc enfin, pour le coefficient de $ee'\cos(\omega' - \omega)$,

$$(B)\qquad \tfrac{1}{2}\left(A_1 + \tfrac{1}{2}aa'\frac{d^2 A_1}{da\,da'}\right) = -\frac{aa'}{4}\frac{(a'^2+a^2)A_0}{(a'^2-a^2)^2} + \frac{(a'^4 - a'^2a^2 + a^4)A_1}{2(a'^2-a^2)^2}.$$

De la formule (d) du n° 18 de l'Introduction, en y faisant $\nu = \frac{1}{2}$, $i = 0$, $P_0 = A_0$, $P_1 = A_1$, $Q_0 = B_0$, on déduit

$$B_0 = \frac{(a'^2+a^2)A_0 - 2aa'A_1}{(a'^2-a^2)^2},$$

d'où, pour le coefficient de (p^2+q^2),

$$(C)\qquad -\frac{1}{8}\left(a\frac{dA_0}{da} + a^2 B_0\right) = -\frac{aa'}{8(a'^2-a^2)^2}[2A_0 aa' - (a'^2+a^2)A_1];$$

ce coefficient sera également celui de $(p'^2+q'^2)$, puisqu'il est symétrique en a et a'.

La formule (e) du numéro précité donne, en y faisant $i = 1$,

$$B_1 = \frac{2aa'A_0 - (a'^2+a^2)A_1}{(a'^2-a^2)^2};$$

d'où, pour le coefficient de $(pp' + qq')$,

$$(D)\qquad \frac{1}{4}\frac{aa'}{(a'^2-a^2)^2}[2aa'A_0 - (a'^2+a^2)A_1].$$

Nous avons donc

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{R_0}{m'} = A_0 + \dfrac{aa'}{8(a'^2-a^2)^2}[2aa'A_0 - (a'^2+a^2)A_1][2(e^2+e'^2) - (p-p')^2 - (q-q')^2] \\ \qquad - \dfrac{1}{4(a'^2-a^2)^2}[aa'(a'^2+a^2)A_0 - 2(a'^4 - a'^2a^2 + a^4)A_1]ee'\cos(\omega'-\omega). \end{cases}$$

On peut mettre cette expression sous une autre forme en substituant à e et ω les quantités b et c du n° 16; on obtient ainsi

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{R_0}{m'} = A_0 + \dfrac{aa'}{8(a'^2-a)^2}[2aa'A_0 - (a'^2+a^2)A_1][2(b^2+c^2+b'^2+c'^2) - (p-p')^2 - (q-q')^2] \\ \qquad - \dfrac{1}{4(a'^2-a^2)^2}[aa'(a'^2+a^2)A_0 - 2(a'^4 - a'^2a^2 + a^4)](bb'+cc'). \end{cases}$$

Pour simplifier, nous poserons

$$(15)\quad \begin{cases} f(a,a') = \dfrac{aa'}{4(a'^2-a^2)^2}[2aa'A_0 - (a'^2+a^2)A_1], \\ f_1(a,a') = \dfrac{1}{4(a'^2-a^2)^2}[aa'(a'^2+a^2)A_0 - 2(a'^4 - a'^2a^2 + a^4)A_1], \end{cases}$$

fonctions qui sont symétriques en a et a'.

Nous aurons alors

$$(13')\quad \begin{cases} R_0 = m'A_0 + m'f(a,a')\left[e^2+e'^2 - \dfrac{(p-p')^2}{2} - \dfrac{(q-q')^2}{2}\right] \\ \qquad - m'f_1(a,a')ee'\cos(\omega'-\omega), \end{cases}$$

$$(14')\quad \begin{cases} R_0 = m'A_0 + m'f(a,a')\left[b^2+c^2+b'^2+c'^2 - \dfrac{(p-p')^2}{2} - \dfrac{(q-q')^2}{2}\right] \\ \qquad - m'f_1(a,a')[bb'+cc']. \end{cases}$$

40. En nous reportant au n° 17 de l'Introduction, nous pouvons supposer $a' > a$ et les formules (a) feront connaître, pour $\nu = \frac{1}{2}$, les valeurs de $A_0 = P_0$, $A_1 = P_1$ en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de $\frac{a}{a'}$. Mais ces séries sont peu convergentes et exigent par suite le calcul d'un grand nombre de termes pour obtenir une approximation convenable, ce qui est un inconvénient sérieux. C'est en vue d'éviter cet inconvénient que l'on exprime A_0 et A_1, au moyen de deux

autres séries $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$ et qui ne sont autre chose que celles qui représentent P_0, P_1, quand on y fait $\nu = -\frac{1}{2}$.

Nous avons

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_0 = a'\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{a}{a'}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{a}{a'}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{a}{a'}\right)^6+\cdots\right], \\ \mathfrak{A}_1 = -a'\left[\frac{a}{a'}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a'}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\left(\frac{a}{a'}\right)^5-\frac{1.3.5.1.1.3.5.7}{4.6.8.2.4.6.8.10}\left(\frac{a}{a'}\right)^7-\cdots\right]. \end{cases}$$

La formule (d, I) donne, en y faisant $\nu = -\frac{1}{2}$, $i = 0$, $Q_0 = A_0$, $P_0 = \mathfrak{A}$, $P_1 = \mathfrak{A}_1$,

$$(16)\qquad A_0 = \frac{(a'^2+a^2)\,\mathfrak{A}_0 + 6aa'\,\mathfrak{A}_1}{(a'^2-a^2)^2},$$

et la formule (e, I) donne de même, en y faisant $\nu = -\frac{1}{2}$, $i = 1$, $Q_1 = A_1$, $P_0 = \mathfrak{A}_0$, $P_1 = \mathfrak{A}_1$,

$$(17)\qquad A_1 = \frac{2aa'\,\mathfrak{A}_0 + 3(a'^2+a^2)\,\mathfrak{A}_1}{(a'^2-a^2)^2}.$$

Mais il nous paraît inutile d'introduire ces valeurs de A_0 et A_1 dans les formules (13) et (14).

§ IV. — Des inégalités séculaires.

41. Reportons-nous aux équations (13), (19), (25) du § II, dans lesquelles nous ferons $R = R_0$; nous aurons

$$(1)\qquad da = 0,$$

$$(2)\quad \begin{cases} db = -an\sqrt{1-b^2-c^2}\,\dfrac{dR_0}{dc}\,dt, \\ dc = an\sqrt{1-b^2-c^2}\,\dfrac{dR_0}{db}\,dt, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} dp = \dfrac{an}{\sqrt{1-e^2}}\,\dfrac{dR_0}{dq}\,dt, \\ dq = -\dfrac{an}{\sqrt{1-e^2}}\,\dfrac{dR_0}{dp}\,dt, \end{cases}$$

$$(4)\qquad d\varepsilon = 2a^2n\frac{dR_0}{da}\,dt - \frac{an}{e}\sqrt{1-e^2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{dR_0}{de}\,dt,$$

42. De la moyenne distance de la planète troublée. — D'après la première des équations (1), nous voyons que la distance moyenne a reste constante au degré d'approximation convenu au n° 38, c'est-à-dire en négligeant les termes de l'ordre mm'.

Il paraît intéressant de s'assurer si ces termes n'ont pas d'influence sur la valeur de a, et c'est à cette recherche que nous allons nous livrer.

Nous avons, d'après la première des équations (14) du n° 34,

$$da = -2a^2\,\mathrm{dR}.$$

Or, au bout d'un certain temps, a deviendra $a + \delta a$, et R, R $+ \delta$R, la caractéristique δ ne se rapportant qu'à des termes de l'ordre mm'. L'équation précédente nous donne par suite

$$-\frac{\delta a}{2} = \int (a+\delta a)^2(\mathrm{dR} + \mathrm{d}\,\delta\mathrm{R}) = a^2\int \mathrm{dR} + 2\int \delta a\,\mathrm{dR} + a^2\int \mathrm{d}\,\delta\mathrm{R}$$

ou encore

$$-\frac{\delta a}{2} = 2\int \delta a\,\mathrm{dR} + a^2\int \mathrm{d}\,\delta\mathrm{R},$$

puisque, en négligeant dans le second membre de l'équation ci-dessus les termes affectés de la caractéristique δ, on a, d'après ce qui précède, $\delta a = 0$.

D'autre part, comme δa est de l'ordre m^2, mm', ..., et que R est de l'ordre m, on a simplement

$$\delta a = -2a^2\,\delta\mathrm{R}.$$

Il nous suffit, dans cette formule, de substituer à la fonction R un des termes de la série trigonométrique qui la représente, soit (n° 38)

$$\mathrm{R} = m'\,\mathrm{J}\cos(i'n't - int + j),$$

expression dans laquelle J, j sont des fonctions a, a', et $n' = a'^{-\frac{3}{2}}$, $n = a^{-\frac{3}{2}}$. Nous avons alors

$$\delta a = -2a^2m'\left\{[\cos(i'n't - int + j)]\,\delta\mathrm{J} - \mathrm{J}\sin(i'n't - int + j)\left(-\frac{3}{2}\frac{i'n'}{a'}\delta a' + \frac{3}{2}\frac{in}{a}\delta a + \delta j\right)\right\}$$

ou simplement

$$\delta a = -2a^2 m' [\cos(i'n't - int + j)\delta \mathrm{J} - \mathrm{J}\sin(i'n't - int + j)\delta j],$$

attendu que δa et par conséquent $\delta a'$ sont du second ordre en m, m'.

Il suit de là que la variation de la distance moyenne de m au Soleil sera périodique si $i'n' - in$ est différent de zéro, ou si, comme cela a lieu dans notre système planétaire, les mouvements moyens de m et m' sont incommensurables. Mais, si le rapport $\frac{n}{n'}$, tout en restant incommensurable, diffère très peu de celui de deux nombres entiers i, i', la distance a variera avec une grande lenteur, et sa variation pourra en quelque sorte être classée parmi les inégalités séculaires. Les irrégularités considérables que présentent les mouvements de Saturne et de Jupiter, et qui, pendant longtemps, sont restées inexpliquées, sont dues à cette cause; et, en effet, le mouvement moyen n' de la première est sensiblement égal à deux fois celui n de la seconde; d'après l'observation, la différence $5n' - 2n$ est inférieure à $\frac{n}{74}$.

Mais, en résumé, les grands axes des orbites planétaires n'éprouvent pas de variations séculaires proprement dites dépendant des masses des planètes et des produits deux à deux de ces masses. Il en est par conséquent de même des mouvements moyens.

43. Théorèmes généraux relatifs aux inégalités séculaires. — Nous poserons

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathrm{R}_0 = m'\mathrm{F}, \\ \Phi = \Sigma mm'\mathrm{F}, \end{cases}$$

le signe Σ se rapportant à la somme des produits deux à deux des masses des planètes du système solaire.

1° *La fonction* Φ *conserve une valeur constante.* — Les équations (2), (3), (4) ont pour équivalentes les suivantes :

$$(2') \qquad \begin{cases} m\,db = -an\sqrt{1-b^2-c^2}\,\dfrac{d\Phi}{dc}\,dt, \\ m\,dc = \quad an\sqrt{1-b^2-c^2}\,\dfrac{d\Phi}{db}\,dt, \end{cases}$$

$$(3')\qquad \begin{cases} m\,dp = \dfrac{an}{\sqrt{1-e^2}}\dfrac{d\Phi}{dq}\,dt, \\ m\,dq = -\dfrac{an}{\sqrt{1-e^2}}\dfrac{d\Phi}{dp}\,dt, \end{cases}$$

$$(4')\qquad m\,d\varepsilon = 2a^2 n\frac{d\Phi}{da}\,dt - \frac{an}{e}\sqrt{1-e^2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d\Phi}{dc}\,dt.$$

Ces valeurs sont complètement indépendantes du degré d'approximation avec lequel R_0 ou Φ a été calculé.

En retranchant l'une de l'autre les équations (2'), multipliées respectivement par dc et db, on trouve

$$\frac{d\Phi}{db}\,db + \frac{d\Phi}{dc}\,dc = 0.$$

Les équations (3') donnent de même

$$\frac{d\Phi}{dp}\,dp + \frac{d\Phi}{dq}\,dq = 0.$$

Comme Φ est une fonction de a, b, c, p, q, a', b', c', ... indépendante du temps et que les grands axes n'éprouvent pas d'inégalités séculaires, il résulte des deux équations précédentes que $d\Phi = 0$. Donc, la fonction Φ conserve une valeur constante.

2° *Des excentricités.* — Si nous négligeons les cubes des excentricités et des inclinaisons et les termes du troisième ordre relatifs aux masses m, m', ..., la valeur de R_0 sera donnée par la formule (14) du n° 39, et l'on voit que $\frac{d\Phi}{db}$, $\frac{d\Phi}{dc}$, $\frac{d\Phi}{dp}$, $\frac{d\Phi}{dq}$ seront du premier ordre; nous devrons, en conséquence, substituer aux équations (2') et (3') les suivantes :

$$(2'')\qquad \begin{cases} m\,db = -an\dfrac{d\Phi}{dc}\,dt, \\ m\,dc = an\dfrac{d\Phi}{db}\,dt, \end{cases}$$

$$(3'')\qquad \begin{cases} m\,dp = an\dfrac{d\Phi}{dq}\,dt, \\ m\,dq = -an\dfrac{d\Phi}{dp}\,dt. \end{cases}$$

En ajoutant entre elles les équations (2″), multipliées respectivement par b et c, on trouve, en se rappelant que $n = a^{-\frac{3}{2}}$, $b^2 + c^2 = e^2$,

$$\frac{m}{2}\sqrt{a}\,de^2 = \frac{d\Phi}{db}\,c - \frac{d\Phi}{dc}\,b$$

et, pour tout le système planétaire,

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\sqrt{a}\,\frac{de^2}{dt} = \frac{d\Phi}{db}\,c - \frac{d\Phi}{dc}\,b + \frac{d\Phi}{db'}\,c' - \frac{d\Phi}{dc'}\,b' + \ldots.$$

Si l'on se reporte à la formule (14) du n° 39, on voit que, en ne considérant que les termes de I, qui dépendent en même temps de b, c, b', c', on a une expression de la forme

$$\Phi = \mathrm{H}(b^2 + c^2 + b'^2 + c'^2) + \mathrm{G}(bb' + cc');$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d\Phi}{db}\,c - \frac{d\Phi}{dc}\,b = \mathrm{H}(b'c - c'b),$$
$$\frac{d\Phi}{db'}\,c' - \frac{d\Phi}{dc'}\,b' = \mathrm{H}(bc' - cb'),$$

et ces deux termes se détruisent par addition.

Il suit de là que le second membre de l'équation ci-dessus est nul, ou que l'on a

$$\Sigma m\sqrt{a}\,e^2 = \text{const.} \tag{6}$$

Donc :

La somme des produits des masses des planètes par les racines carrées des demi-grands axes et les carrés des excentricités reste constante.

Il suit de là que les excentricités des orbites planétaires ne peuvent pas croître indéfiniment, et qu'elles restent très petites, puisque, actuellement, la constante de la formule est très petite.

3° *Des inclinaisons.* — Des équations (3″) on déduit

$$\Sigma m\sqrt{a}\,\frac{p\,dp + q\,dq}{dt} = p\frac{d\Phi}{dq} - q\frac{d\Phi}{dp} + p'\frac{d\Phi}{dq'} - q'\frac{d\Phi}{dp'} + \ldots.$$

On démontrerait, comme plus haut, que le second membre de cette

équation est nul. On a donc

$$\Sigma m\sqrt{a}(p^2+q^2)=\text{const.}$$

ou

$$\Sigma m\sqrt{a}\tan g^2\varphi=\text{const.}; \tag{7}$$

d'où ce théorème :

La somme des produits des masses des planètes par les racines carrées des demi-grands axes et les carrés des tangentes des angles des inclinaisons est constante.

Il suit de là que les inclinaisons resteront très petites, comme elles le sont actuellement.

4° Des équations (3″) on tire

$$\Sigma m\sqrt{a}\frac{dp}{dt}=\frac{d\Phi}{dq}+\frac{d\Phi}{dq'}+\ldots,$$

$$\Sigma m\sqrt{a}\frac{dq}{dt}=\frac{d\Phi}{dp}+\frac{d\Phi}{dp'}+\ldots;$$

mais, en se reportant à la formule (14) du n° 39, on voit que les seconds membres des équations précédentes sont nuls. On a donc

$$\begin{cases}\Sigma m\sqrt{a}p=\text{const.},\\ \Sigma m\sqrt{a}q=\text{const.}\end{cases} \tag{8}$$

5° *Relations entre les vitesses angulaires des périhélies et des nœuds des orbites.* — Des équations (2″) et (3″) on déduit la suivante :

$$\Sigma m\sqrt{a}\,\frac{b\,dc-c\,db+q\,dp-p\,dq}{dt}=\frac{d\Phi}{db}+\frac{d\Phi}{dc}+\frac{d\Phi}{dp}+\frac{d\Phi}{dq}+\frac{d\Phi}{db'}+\frac{d\Phi}{dc'}+\ldots.$$

Comme Φ est une fonction homogène du second degré en b, c, p, q, b', c', ..., le second membre de cette équation est égal à 2Φ ou est constant.

D'autre part, nous avons

$$b=e\sin\omega,\qquad c=e\cos\omega,$$

$$p=\tan g\varphi\sin\alpha,\quad q=\tan g\varphi\cos\alpha,$$

d'où

$$b\,dc - c\,db = -e^2\,d\omega,$$
$$q\,dp - p\,dq = \operatorname{tang}^2\varphi\,d\alpha.$$

Nous avons donc

$$\Sigma m\sqrt{a}\,e^2\frac{d\omega}{dt} - \Sigma m\sqrt{a}\operatorname{tang}^2\varphi\frac{d\alpha}{dt} = \text{const.}$$

En se reportant aux équations (2″) et (3″) et à la formule (14) du n° 39, on voit que db, dc sont indépendants de p, q, et dp et dq de b et c; en d'autres termes, le couple de valeurs e, ω est indépendant du couple de p et q et *vice versa*. L'équation précédente se décompose, par suite, en ces deux autres :

$$(9)\qquad \begin{cases} \Sigma m\sqrt{a}\,e^2\dfrac{d\omega}{dt} = \text{const.}, \\ \Sigma m\sqrt{a}\operatorname{tang}^2\varphi\dfrac{d\alpha}{dt} = \text{const.}, \end{cases}$$

desquelles il résulte que, si les vitesses angulaires des périhélies $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\omega'}{dt}$, ··· sont toutes de même signe, ainsi que les vitesses angulaires des nœuds des orbites $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\alpha'}{dt}$, ···, ces différentes vitesses ne pourront pas croître indéfiniment.

6° *Relations entre les variations des longitudes de l'époque.* — La troisième des formules (13) du n° 33,

$$d\omega = -\frac{an}{e}\sqrt{1-e^2}\frac{d\mathrm{R}}{de}\,dt$$

ou

$$m\,d\omega = -\frac{an}{e}\sqrt{1-e^2}\frac{d\Phi}{de}\,dt,$$

permet de réduire l'équation (4′) à la forme suivante :

$$m\,d\varepsilon = (1-\sqrt{1-e^2})\,m\,d\omega + 2\sqrt{a}\frac{d\Phi}{da}\,dt,$$

en se rappelant que $n = a^{-\frac{3}{2}}$. On déduit de là

$$\Sigma m\sqrt{a}\frac{d\varepsilon}{dt} = \Sigma m\sqrt{a}(1-\sqrt{1-e^2})\frac{d\omega}{dt} + 2\Sigma a\frac{d\Phi}{da}.$$

Or, Φ étant une fonction homogène du degré -1 en a et a', on a

$$\Sigma a \frac{d\Phi}{dt} = -\Phi = \text{const.}$$

D'autre part, en négligeant le cube de e^2, nous avons

$$\Sigma m\sqrt{a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d\omega}{dt} = \tfrac{1}{2}\Sigma m\sqrt{a}\,e^2\frac{d\omega}{dt},$$

quantité qui est constante en vertu de la première des formules (9).

Il vient donc

$$\Sigma m\sqrt{a}\frac{d\varepsilon}{dt} = \text{const.} \tag{10}$$

Si, dans cette équation, on ne considère que les termes de ε, ε', ..., qui ne contiennent le temps qu'à des puissances supérieures à la première, on peut faire abstraction de la constante du second membre, et l'on obtient, en intégrant,

$$\Sigma m\sqrt{a}\,\varepsilon = \text{const.} \tag{10'}$$

44. Considérations générales sur la stabilité du système solaire. — Nous avons démontré que les grands axes des orbites planétaires restent constants aux termes du second ordre près relativement aux masses des planètes; on a même démontré qu'il en était encore de même lorsqu'on tient compte de ces termes. Il n'y a donc plus à revenir sur ce fait que les grands axes restent constants; mais il est important de s'assurer si le second théorème du numéro précédent, relatif aux inclinaisons et aux excentricités des orbites, a encore lieu lorsqu'on tient compte des termes du second ordre en m, m', ..., quelle que soit l'approximation à laquelle on s'arrête dans le calcul des quantités e, φ, e', φ', ...

La première des équations (2) du Titre III de l'Introduction nous donne, en y supposant la masse M du Soleil égale à l'unité,

$$\Sigma m\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right) = C + \Sigma mm'\left[(x'-x)\frac{d}{dt}(y'-y)-(y'-y)\frac{d}{dt}(x'-x)\right],$$

Nous avons vu (n° 2) que, dans le mouvement elliptique de m, le double de l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon vecteur a

pour expression $\sqrt{a(1-e^2)}$, ou que

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi.$$

Cette relation a encore lieu dans le mouvement troublé, en y considérant e et φ comme variables. Nous avons donc

$$\Sigma m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi=C+\Sigma mm'\left[(x'-x)\frac{d}{dt}(y'-y)-(y'-y)\frac{d}{dt}(x'-x)\right].$$

Conformément au degré d'approximation que nous avons admis, nous devrons substituer, dans le second membre de cette équation, les valeurs des coordonnées qui se rapportent au mouvement elliptique; or, comme x, y et x', y' ne dépendent respectivement que de termes périodiques en nt et $n't$, on voit que le second membre dont il s'agit ne peut se composer que d'une constante et de termes périodiques dont nous devons faire abstraction. Nous sommes donc conduit à poser

$$\Sigma m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi=\text{const.}$$

La deuxième et la troisième des équations (2) du Titre III de l'Introduction donneront de la même manière

$$\Sigma m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\cos\alpha=\text{const.}\quad(1),$$
$$\Sigma m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\sin\alpha=\text{const.}$$

Si, pour simplifier, nous ne considérons d'abord que deux planètes m, m', dont les plans des orbites comprennent l'angle γ, nous aurons

$$\cos\gamma=\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'\cos(\alpha'-\alpha).$$

En ajoutant membre à membre les carrés des trois équations suivantes :

$$m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi\quad+m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos\varphi'\quad=\text{const.},$$
$$m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\cos\alpha+m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin\varphi'\cos\alpha'=\text{const.},$$
$$m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\sin\alpha+m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin\varphi'\sin\alpha'=\text{const.},$$

(1) Dans la note du n° 39, on a démontré, en effet, que les cosinus des angles formés par le plan de l'orbite de m avec les plans zx, zy ont respectivement pour valeurs $-\sin\varphi\cos\alpha$, $\sin\varphi\sin\alpha$.

on trouve

$$m^2a^2(1-e^2)+m'^2a'(1-e'^2)+2mm'\sqrt{aa'(1-e^2)(1-e'^2)}\cos\gamma=\text{const.}$$

Nous remarquerons qu'on a identiquement

$$\sqrt{1-e^2}=1-\frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}},\quad \sqrt{1-e'^2}=1-\frac{e'^2}{1+\sqrt{1-e'^2}},$$

$$\cos\gamma=1-\frac{\sin^2\gamma}{1+\cos\gamma},$$

et, en nous rappelant que $\sqrt{a}=na^2$, $\sqrt{a'}=n'a'^2$, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\sqrt{aa'(1-e^2)(1-e'^2)}\cos\gamma\\
&\quad=a^2a'^2nn'\left(\sqrt{1-e'^2}-\frac{e^2\sqrt{1-e'^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)\cos\gamma\\
&\quad=a^2a'^2nn'\left(1-\frac{e'^2}{1+\sqrt{1-e'^2}}-\frac{e^2\sqrt{1-e'^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)\cos\gamma\\
&\quad=a^2a'^2nn'\left(1-\frac{\sin^2\gamma}{1+\cos\gamma}-\frac{e^2\sqrt{1-e'^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cos\gamma-\frac{e'^2}{1+\sqrt{1-e'^2}}\cos\gamma\right).
\end{aligned}$$

Introduisons cette expression dans l'équation établie plus haut; en faisant passer dans le second membre les termes constants qui ne renferment que a, a', n et n', nous aurons

$$m^2ae^2+m'a'e'^2+2mm'a^2a'^2nn'\left[\left(\frac{e^2\sqrt{1-e'^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}+\frac{e'^2}{1+\sqrt{1+e'^2}}\right)\cos\gamma+\frac{\sin^2\gamma}{1+\cos\gamma}\right]=\text{const.}$$

La constante, qui est du quatrième ordre en e, e', γ, m, m', est très petite d'après les valeurs mêmes de ces éléments qui résultent des observations actuelles, et, comme les vitesses angulaires n, n' sont de même sens et de même signe, tous les termes de l'équation précédente sont positifs, d'où il suit que les quantités e, e', γ resteront toujours très petites, comme elles le sont actuellement.

On arriverait au même résultat en considérant un nombre quelconque de planètes m', m'', ..., puisque chacune des planètes m', m'', ... ne ferait qu'ajouter au premier membre de l'équation ci-dessus des termes semblables et du même ordre de grandeur que ceux qui le composent.

Ainsi donc, la stabilité du système planétaire est assurée relativement aux grands axes, aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, en ayant égard aux termes du second ordre dépendant des masses perturbatrices.

45. Calcul des inégalités séculaires, des excentricités et des longitudes des périhélies. — Nous désignerons par ν le nombre des planètes m, m', ... qui agissent les unes sur les autres.

En ayant égard à la formule (14′) du n° 39, qui donne le terme en m' de la fonction perturbatrice séculaire, les équations (2) du n° 41 nous donneront

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
db &= -an\,\{2c[m'f(a,a')+m''f(a,a'')+\dots]\\
&\qquad -m'c'f_1(a,a')-m''b''f_1(a,a'')-\dots\},\\
dc &= \;\;an\,\{2b[m'f(a,a')+m''f(a,a'')+\dots]\\
&\qquad -m'b'f_1(a,a')-m''b''f_1(a,a'')-\dots\},\\
db' &= -a'n\,\{2c'[mf(a,a')+m''f(a',a'')+\dots]\\
&\qquad -mcf_1(a,a')-m''c''f_1(a',a'')-\dots\},\\
dc' &= \;\;a'n'\,\{2b'[mf(a,a')+m''f(a',a'')+\dots]\\
&\qquad -mbf_1(a,a')-m''b''f_1(a',a'')-\dots\},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right.$$

Ces 2ν équations seront satisfaites par des valeurs de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
b &= \mathrm{G}\sin(ht+k), & c &= \mathrm{G}\cos(ht+k),\\
b' &= \mathrm{G}\lambda'\sin(ht+k), & c' &= \mathrm{G}\lambda'\cos(ht+k),\\
b'' &= \mathrm{G}\lambda''\sin(ht+k), & c'' &= \mathrm{G}\lambda''\cos(ht+k),\\
&\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots,
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles h, k, G, λ', λ'', ... sont des constantes.

En substituant ces valeurs dans les équations (1), on obtient les ν suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
h &= -an\,\{2[m'f(a,a')+m''f(a,a'')+\dots]\\
&\qquad -m'\lambda'f_1(a,a')-m''\lambda''f_1(a,a'')+\dots\},\\
\lambda'h &= -a'n'\,\{2\lambda'[mf(a,a')+m''f(a',a'')+\dots]\\
&\qquad -mf_1(a,a')-m''\lambda''f_1(a',a'')+\dots\},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right.$$

En éliminant les λ', λ'', ... entre ces équations, on obtiendra une équation en h du degré ν; à chacune de ses racines correspondra un système de valeurs de λ', λ'', ...

Soient $(\lambda'_1, \lambda''_1, \ldots)$, $(\lambda'_2, \lambda''_2, \ldots)$, ... le système de valeurs des λ', λ'', ..., correspondant respectivement aux racines h'_1, h''_2, ... de l'équation en h; G_i, k_i deux constantes arbitraires. Les 2ν équations (1) seront satisfaites par

$$(4)\quad \begin{cases} b = G_1 \sin(h_1 t + k_1) + G_2 \sin(h_2 t + k_2) + \ldots, \\ c = G_1 \cos(h_1 t + k_1) + G_2 \cos(h_2 t + k_2) + \ldots, \\ b' = G_1 \lambda'_1 \sin(h_1 t + k_1) + G_2 \lambda'_2 \sin(h_2 t + k_2) + \ldots, \\ c' = G_1 \lambda'_1 \cos(h_1 t + k_1) + G_2 \lambda'_2 \cos(h_2 t + k_2) + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et ces expressions en sont les intégrales générales, puisqu'elles renferment 2ν constantes arbitraires G_1, G_2, ..., k_1, k_2, ..., qui ne pourront être déterminées que par l'observation.

Les valeurs de b, c étant supposées connues, on déduit celle de e de la formule

$$e^2 = b^2 + c^2 = G_1^2 + G_2^2 + \ldots + 2 G_1 G_2 \cos[(h_2 - h_1)t + k_2 - k_1] + \ldots,$$

et l'on aura

$$e^2 < (G_1 + G_2 + \ldots)^2$$

si les cosinus qui entrent dans l'expression de e^2 sont tous réels; en d'autres termes, les excentricités des orbites pourront, à la longue, éprouver des altérations appréciables, mais qui, néanmoins, resteront toujours de très petites quantités, si les racines h_1, h_2, ... sont toutes réelles et inégales, et c'est ce qui a lieu. En effet, si nous supposons que quelques-unes de ces racines soient imaginaires, b renfermera un certain nombre de termes de la forme $BE^{\gamma t}$, E étant la base du système de logarithmes népériens et B, γ des constantes réelles. Soient $CE^{\gamma t}$, $B'E^{\gamma t}$, $C'E^{\gamma t}$, $B''E^{\gamma t}$, ... les termes, correspondant à $BE^{\gamma t}$, de c, b', c', b'', ..., les coefficients C, B', C', B'', ... étant aussi des quantités réelles. Ces expressions de e^2, e'^2, ... renfermeront respectivement les termes $(B^2 + C^2)E^{2\gamma t}$, $(B'^2 + C'^2)E^{2\gamma t}$, ...; mais nous avons trouvé au n° 43 l'équation

$$(\alpha)\qquad \Sigma m \sqrt{a} e^2 = \text{const.},$$

dont le premier membre comprendrait le terme

$$E^{2\gamma t}\left[m\sqrt{a}(B^2+C^2)+m'\sqrt{a'}(B'^2+C'^2)+\ldots\right],$$

qui ne se réduira avec aucune autre; par conséquent, si les radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, ... sont de même signe, c'est-à-dire si les planètes circulent dans le même sens, il faudra qu'on ait $B=0$, $C=0$, $B'=0$, $C'=0$, ... pour que l'équation (α) soit satisfaite. Il suit de là que b, c, b', c', ... ne renferment pas d'exponentielles, et par conséquent l'équation en h n'a pas de racines imaginaires.

Si cette équation avait des racines réelles et égales, b contiendrait un certain nombre de termes de la forme Bt^γ, et si Ct^γ, Bt'^γ, $C't^\gamma$ sont les termes correspondants de c, b', c', le premier membre de l'équation (α) renfermerait le terme

$$t^{2\gamma}\left[m\sqrt{a}(B^2+C^2)+m'\sqrt{a'}(B'^2+C'^2)+\ldots\right],$$

et l'on démontrerait comme ci-dessus que $B=0$, $C=0$, $B'=0$, ... L'équation en h ne peut donc avoir que des racines réelles et inégales.

La longitude du périhélie de m sera donnée par

$$\operatorname{tang}\omega=\frac{b}{c}=\frac{G_1\sin(h_1t+k_1)+G_2\sin(h_2t+k_2)+\ldots}{G_1\cos(h_1t+k_1)+G_2\cos(h_2t+k_2)+\ldots}.$$

Si l'on porte cette valeur dans l'expression

$$\operatorname{tang}(\omega-h_1t-k_1)=\frac{\operatorname{tang}\omega-\operatorname{tang}(h_1t+k_1)}{1+\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}(h_1t+k_1)},$$

on trouve, après réductions,

$$\operatorname{tang}(\omega-h_1t-k_1)=\frac{G_2\sin[(h_2-h_1)t+k_2-k_1]+G_3\sin[(h_3-h_1)t+k_3-k_1]+\ldots}{G_1+G_2\cos[(h_2-h_1)t+k_2-k_1]+G_3\cos[(h_3-h_1)t+k_3-k_1]+\ldots}$$

Si, en ne considérant que les valeurs absolues, on a $G_1>G_2+G_3+\ldots$, le dénominateur de l'expression précédente ne pourra devenir nul; les oscillations de l'angle $\omega-h_1t-k_1$ resteront par suite comprises entre 90° et -90°, et h_1t+k_1 représentera le mouvement moyen du périhélie; toutefois, de ce cas particulier, on ne peut rien conclure de général, et les périhélies pourront se déplacer d'un mouvement varié,

mais très lent (n° 43), sans qu'on puisse assigner des limites à leurs déplacements séculaires.

Dans les applications, on opère d'une manière différente de la précédente pour calculer les inégalités de e et ω; on emploie à cet effet la deuxième et la troisième des formules (13) du n° 33, en y faisant $R = R_0$ et en ayant égard à la formule (13′) du n° 39.

Nous avons d'abord, en négligeant e^2 devant l'unité,

$$de = \frac{an}{e}\frac{dR_0}{d\omega}dt_1,$$

$$d\omega = -\frac{an}{e}\frac{dR_0}{de}dt,$$

puis

$$(5)\quad \begin{cases} de = \dfrac{an}{e}\left[m' f_1(a,a') e' \sin(\omega' - \omega) + m'' f_1(a,a'') e'' \sin(\omega'' - \omega) + \dots\right], \\ d\omega = -an\left[2m' f(a,a') + 2m'' f(a,a'') + \dots \right. \\ \qquad \left. - m' f_1(a,a')\dfrac{e'}{e}\cos(\omega' - \omega) - m'' f_1(a,a'')\dfrac{e''}{e}\cos(\omega'' - \omega) + \dots\right], \end{cases}$$

On aura des expressions semblables pour de', $d\omega'$, de'', $d\omega''$, ..., qu'il nous paraît inutile d'écrire.

Qu'il nous suffise de considérer les équations (5). Nous pourrons, avec une approximation satisfaisante pour plusieurs siècles, avant et après l'époque choisie comme origine du temps, intégrer ces équations en donnant, dans les seconds membres a, e, e', e'', ..., ω, ω', ω'', ..., les valeurs qui se rapportent à cette époque.

Pour obtenir des valeurs plus exactes, il suffira de remarquer que e, ω deviennent, au bout du temps t,

$$e + t\frac{de}{dt} + \frac{t^2}{2}\frac{d^2e}{dt^2} + \dots, \quad \omega + t\frac{d\omega}{dt} + \frac{t^2}{2}\frac{d^2\omega}{dt^2} + \dots,$$

et, comme les équations (5) et leurs semblables en e', ω', e'', ω'', ... donnent, par la différentiation, les valeurs de $\frac{d^2e}{dt^2}$, $\frac{d^3e}{dt^3}$, ..., $\frac{d^2e'}{dt^2}$, $\frac{d^3e'}{dt^3}$, ..., $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $\frac{d^3\omega}{dt^3}$, ..., $\frac{d^2\omega'}{dt^2}$, $\frac{d^3\omega'}{dt^3}$, ..., on pourra étendre autant qu'on le voudra les deux séries précédentes; mais il suffit, dans la comparaison des

observations les plus anciennes que nous connaissons, de s'arrêter au troisième terme de ces séries.

46. Calcul des inégalités séculaires des inclinaisons et des longitudes des nœuds. — Des formules (3) du n° 41 et de la formule (14′) du n° 39, on déduit, en négligeant e^2 devant l'unité,

$$(1)\quad \begin{cases} dp = \quad an\,[m'f(a,a')(q'-q)+m''f(a,a'')(q''-q)+\dots]\,dt,\\ dq = -an\,[m'f(a,a')(p'-p)+m''f(a,a'')(p''-p)+\dots]\,dt,\\ dp' = \quad a'n'[mf(a,a')(q-q')+m''f(a,a'')(q''-q)+\dots]\,dt,\\ dq' = -a'n'[mf(a,a')(p-p')+m''f(a,a'')(p''-p)+\dots]\,dt. \end{cases}$$

Ces équations s'intégreront comme les équations (1) du numéro précédent, et nous obtiendrons ainsi des résultats de la forme

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{N}\sin(it+l)+\mathrm{N}_1(i_1t+l_1)+\dots,\\ q &= \mathrm{N}\cos(it+l)+\mathrm{N}_1(i_1t+l_1)+\dots,\\ p' &= \mathrm{N}'\sin(it+l)+\mathrm{N}'_1\sin(i_1t+l_1)+\dots,\\ q' &= \mathrm{N}'\cos(it+l)+\mathrm{N}'_1\cos(i_1t+l_1)+\dots,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

$i, i_1, i_2, \dots$ étant les racines d'une équation d'un nombre égal à celui des corps qui réagissent les uns sur les autres, et les N, l des constantes qui dépendent de la position des orbites à une époque donnée. Nous avons conclu de l'équation (7) du n° 42 que les inclinaisons resteront très petites, comme elles le sont à présent; les racines i seront, par suite, réelles et inégales.

Nous rappellerons que l'on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{p^2+q^2}, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{p}{q}.$$

Dans les applications, pour calculer les variations éprouvées par φ et α, on substitue aux équations (1) d'autres équations, qui peuvent s'en déduire, mais qu'il est plus simple d'établir directement.

Les quatrième et sixième équations (13) du n° 33 nous donnent

$$(2)\quad \begin{cases} d\varphi = -\dfrac{an}{\sqrt{1-e^2}}\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{d\mathrm{R}_0}{d\alpha}\,dt,\\ d\alpha = \quad \dfrac{an}{\sqrt{1-e^2}}\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{d\mathrm{R}_0}{d\varphi}\,dt, \end{cases}$$

et la formule (13′) du n° 39, pour le terme de R_0, qui ne dépend que de m', p, p', q, q',

$$R_0 = -m'\frac{f(a,a')}{2}[(\operatorname{tang}\varphi \sin\alpha - \operatorname{tang}\varphi' \sin\alpha')^2 + (\operatorname{tang}\varphi \cos\alpha - \operatorname{tang}\varphi' \cos\alpha')^2].$$

De là on déduit

$$\frac{dR_0}{d\alpha} = -m' f(a,a') \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi' \sin(\alpha' - \alpha),$$

$$\frac{dR_0}{d\varphi} = -m' \frac{f(a,a')}{\cos^2\varphi} \operatorname{tang}\varphi \left[1 - \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\operatorname{tang}\varphi} \cos(\alpha' - \alpha)\right].$$

Les formules (2) nous donnent alors, en négligeant les carrés des inclinaisons et des excentricités,

$$(3)\quad \begin{cases} d\varphi = -an\,[m' f(a,a') \operatorname{tang}\varphi' \sin(\alpha' - \alpha) + m'' f(a,a'') \operatorname{tang}\varphi'' \sin(\alpha'' - \alpha) + \dots]\,dt, \\ d\alpha = an\left[-m' f(a,a') - m'' f(a,a'') - \dots \right. \\ \qquad \left. + m' f(a,a') \dfrac{\operatorname{tang}\varphi'}{\operatorname{tang}\varphi} \cos(\alpha' - \alpha) + m'' f(a,a') \dfrac{\operatorname{tang}\varphi''}{\operatorname{tang}\varphi} \cos(\alpha'' - \alpha) + \dots\right] dt, \\ d\varphi' = -a' n' [m f(a,a') \operatorname{tang}\varphi \sin(\alpha - \alpha') + m'' f(a',a'') \operatorname{tang}\varphi'' \sin(\alpha'' - \alpha') + \dots]\,dt, \\ d\alpha' = a' n'\left[-m f(a,a') - m'' f(a',a'') - \dots \right. \\ \qquad \left. + m f(a,a') \dfrac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi'} \cos(\alpha - \alpha') + m'' f(a',a'') \dfrac{\operatorname{tang}\varphi''}{\operatorname{tang}\varphi'} \cos(\alpha'' - \alpha') + \dots\right] dt. \end{cases}$$

Pour rendre applicables ces formules aux usages astronomiques, il faut leur faire subir une modification, en raison de ce que les astronomes ont coutume de substituer le plan mobile de l'écliptique au plan fixe auquel nous avons rapporté jusqu'ici les orbites planétaires.

Supposons donc que m représente la Terre; considérons un plan fixe $x'My'$, passant par M, censé peu incliné sur les orbites des planètes, et deux axes rectangulaires Mx', My' tracés dans le plan. Soient Mz' la perpendiculaire en M à ce plan, x', y', z' les coordonnées de m' à un instant quelconque, z l'ordonnée du plan de l'écliptique correspondant aux abscisses x', y'.

Nous avons (n° 39)

$$z' = q'y' - p'x', \quad z = qy' - px'$$

et, pour la hauteur z'_1 de m' au-dessus de l'écliptique,

$$z'_1 = z' - z = (q' - q)\,y' - (p' - p)\,x',$$

en négligeant les termes du second ordre relatifs aux inclinaisons.

Mais, si φ'_1, α'_1 désignent l'inclinaison et la longitude du nœud de m' sur l'écliptique, on a aussi

$$z'_1 = y' \operatorname{tang}\varphi'_1 \cos\alpha'_1 - x' \operatorname{tang}\varphi'_1 \sin\alpha'_1;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi'_1 \cos\alpha'_1 = q' - q, \quad \operatorname{tang}\varphi'_1 \sin\alpha'_1 = p' - p,$$

$$\operatorname{tang}\varphi'_1 = \sqrt{(p' - p)^2 + (q' - q)^2}, \quad \operatorname{tang}\alpha'_1 = \frac{p' - p}{q' - q}$$

et

$$d\varphi'_1 = \frac{(p' - p)\,(dp' - dp) + (q' - q)\,(dq' - dq)}{\sqrt{(p - p')^2 + (q - q')^2}},$$

$$d\alpha'_1 = \frac{(q' - q)\,(dp' - dp) - (p' - p)\,(dq' - dq)}{(p' - p)^2 + (q' - q)^2}.$$

Si nous prenons maintenant pour plan fixe $x'y'$ celui de l'écliptique à l'époque à partir de laquelle on mesure le temps, nous pourrons supposer $p = 0$, $q = 0$ dans ces différentielles, qui deviennent par suite

$$d\varphi'_1 = \sin\alpha'\,(dp' - dp) + \cos\alpha'\,(dq' - dq),$$

$$d\alpha'_1 = \frac{\cos\alpha'\,(dp' - dp) - \sin\alpha'\,(dq' - dq)}{\operatorname{tang}\varphi'}.$$

Mais nous avons (n° 35), en continuant à négliger les carrés des inclinaisons,

$$dp = \sin\alpha\,d\varphi + \operatorname{tang}\varphi\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$dq = \cos\alpha\,d\varphi - \operatorname{tang}\varphi\sin\alpha\,d\alpha;$$

par suite,

$$d\varphi'_1 = d\varphi' - \cos(\alpha' - \alpha)\,d\varphi - \sin(\alpha' - \alpha)\operatorname{tang}\varphi\,d\alpha,$$

$$d\alpha'_1 = \frac{d\alpha' + \sin(\alpha' - \alpha)\,d\varphi - \cos(\alpha' - \alpha)\operatorname{tang}\varphi\,d\alpha}{\operatorname{tang}\varphi'},$$

expressions dans lesquelles on devra substituer les valeurs (3), en y faisant $\varphi = 0$, après avoir toutefois multiplié par $\operatorname{tang}\varphi$ celle de $d\alpha$.

Nous trouvons ainsi

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi'_1}{dt} = (an - a'n')\,[\quad m''\,f(a', a'')\tang\varphi''\sin(\alpha''-\alpha') \\ \qquad\qquad + m'''\,f(a', a''')\tang\varphi'''\sin(\alpha''-\alpha') + \dots], \\ \dfrac{d\alpha'_1}{dt} = \dfrac{a'n'}{\tang\varphi'}\Big[-m\,f(a,a') - m''\,f(a,a'') + \dots \\ \qquad\qquad + m''\dfrac{\tang\varphi''}{\tang\varphi'}\cos(\alpha''-\alpha') + m'''\dfrac{\tang\varphi'''}{\tang\varphi'}\cos(\alpha''-\alpha') + \dots\Big], \\ \qquad -an\Big[m'\,f(a,a') + m''\,f(a,a'')\dfrac{\tang\varphi''}{\tang\varphi'}\cos(\alpha''-\alpha') \\ \qquad\qquad + m'''\,f(a,a''')\dfrac{\tang\varphi'''}{\tang\varphi'}\cos(\alpha'''-\alpha') + \dots\Big]. \end{cases}$$

On aura des valeurs semblables pour les autres masses m'', m''', ..., et l'on obtiendra des valeurs aussi approximatives que l'on voudra de $\delta\varphi'_1$, $\delta\alpha'_1$, en appliquant la méthode indiquée à la fin du numéro précédent.

Supposons que deux planètes m, m' soient assez éloignées des autres planètes pour que ces dernières n'aient pas sur elles une influence sensible, ce qui a lieu à très peu près pour Jupiter et Saturne. La première des équations (4) nous donne $d\varphi_1 = 0$: donc l'*angle des plans des deux orbites reste constant*. On voit que, sans faire aucune hypothèse sur le choix du plan $x'\mathrm{M}y'$, pourvu qu'il fasse de petits angles avec les orbites, la quantité $(p'-p)^2 + (q'-q)^2$ reste constante.

47. Calcul des inégalités séculaires de la longitude de l'époque. — En ne conservant que les secondes puissances des excentricités, l'équation (4) du n° 41 devient

$$d\varepsilon = 2a^2 n\frac{d\mathrm{R}_0}{da}dt - \frac{ane}{2}\frac{d\mathrm{R}_0}{de}dt,$$

ou, en se reportant à la formule (13′) du n° 39 et en ne considérant d'abord que la planète perturbatrice m',

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{anm'}\dfrac{d\varepsilon}{dt} = \quad 2a\dfrac{d\mathrm{A}_0}{da} + 2a\dfrac{df(a,a')}{da}\left[e^2 + e'^2 - \left(\dfrac{p'-p}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{q'-q}{2}\right)^2\right] \\ \qquad\qquad - 2a\dfrac{df_1(a,a')}{da}ee'\cos(\omega'-\omega) - f(a,a')\,e^2 + \tfrac{1}{2}f_1(a,a')\,ee'\cos(\omega'-\omega). \end{cases}$$

Comme nous avons trouvé au n° 39

$$(\alpha) \qquad \frac{d\mathrm{A}_0}{da} = \frac{a\mathrm{A}_0 - a'\mathrm{A}_1}{a'^2 - a^2},$$

il ne nous reste qu'à déterminer les dérivées par rapport à a des fonctions $f(a, a')$ et $f_1(a, a')$, en nous rappelant que nous avons aussi établi au numéro précité la relation

$$(\beta) \qquad \frac{d\mathrm{A}_1}{da} = \frac{a}{a'}\frac{d\mathrm{A}_0}{da}.$$

Nous avons posé

$$f(a, a') = \frac{aa'}{4(a'^2 - a^2)^2}[2aa'\mathrm{A}_0 - (a'^2 + a^2)\mathrm{A}_1],$$

d'où

$$\frac{df(a, a')}{da} = \frac{a'(a'^2 + 3a^2)}{4(a'^2 - a^2)^3}[2aa'\mathrm{A}_0 - (a'^2 + a^2)\mathrm{A}_1]$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{aa'}{(a'^2 - a^2)^2}\left[2aa'\frac{d\mathrm{A}_0}{da} - (a'^2 + a^2)\frac{d\mathrm{A}_1}{da} + 2a'\mathrm{A}_0 - 2a\mathrm{A}_1\right];$$

puis, en ayant égard aux valeurs (α) et (β),

$$2aa'\frac{d\mathrm{A}_0}{da} - (a'^2 - a^2)\frac{d\mathrm{A}_1}{da} + 2a'\mathrm{A}_0 - 2a\mathrm{A}_1$$
$$= (3a^2 - a'^2)\frac{a'}{a}\frac{d\mathrm{A}_0}{da} + 2a'\mathrm{A}_0 - 2a\mathrm{A}_1$$
$$= \frac{\mathrm{A}_0(a^2 + a'^2)aa' + \mathrm{A}_1(a'^4 - 5a^2a'^2 + 2a^4)}{a(a'^2 - a^2)}$$

et enfin

$$(2) \qquad \frac{df(a, a')}{da} = \frac{a'}{4(a'^2 - a^2)^3}[2\mathrm{A}_0(a'^2 + 2a^2)aa' - (a'^2 + 9a^2)a^2\mathrm{A}_1].$$

Considérons maintenant la fonction

$$f_1(a, a') = \frac{1}{4(a'^2 - a^2)^2}[aa'(a'^2 + a^2)\mathrm{A}_0 - 2(a'^4 - a'^2a^2 + a^4)\mathrm{A}_1].$$

Nous avons

$$\frac{df_1(a,a')}{da} = \frac{a}{(a'^2-a)^3}[aa'(a'^2+a^2)A_0 - 2(a'^4 - a'^2a^2 + a^4)A_1]$$
$$+ \frac{1}{4(a'^2-a^2)^2}\left[aa'(a'^2+a^2)\frac{dA_0}{da} - 2(a'^4 - a'^2a^2+a^4)\frac{dA_1}{da}\right.$$
$$\left. + a'(a'^2+3a^2)A_0 + 4a(a'^2-2a^2)A_1\right]$$

et

$$aa'(a'^2+a^2)\frac{dA_0}{da} - 2(a'^4 - a'^2a^2+a^4)\frac{dA_1}{da} + a'(a'^2+3a^2)A_0 + 4a(a'^2-2a^2)A_1$$
$$= -\frac{a'}{a}(2a'^4 - 3a^2a'^2 + a^4)\frac{dA_0}{da} + a'(a'^2+3a^2)A_0 + 4a(a'^2-2a^2)A_1$$
$$= \frac{1}{a(a'^2-a^2)}[(-a'^4+5a^2a'^2-4a^4)aa'A_0 + (2a'^6 - a'^4a^2 - 11a'^2a^4 + 8a^6)A_1].$$

Après quelques réductions, on trouve

$$(3)\quad \frac{df_1(a,a')}{da} = \frac{1}{4a(a'^2-a^2)^3}[(9a^2-a'^2)aa'^3A_0 + (2a'^4 - 9a'^2a^2 - 3a^4)a'^2A_1].$$

Les formules (2) et (3) ne sont réellement utiles qu'au point de vue des calculs numériques, car elles n'offrent pas de symétrie.

C'est pourquoi nous nous en tiendrons à l'équation (1), en ajoutant toutefois aux notations qui s'y rapportent la suivante : $A_0 = f_0(a,a')$, en nous rappelant que ce coefficient est symétrique en a et a'. Nous avons donc, en tenant compte de toutes les masses perturbatrices,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} d\varepsilon = \quad & m'an\left\{2a\frac{df_0(a,a')}{da} + \left[2a\frac{df(a,a')}{da} - f(a,a')\right]e^2\right.\\ & + \left[2a\frac{df_1(a,a')}{da} - \tfrac{1}{2}f_1(a,a')\right]ee'\cos(\omega'-\omega)\\ & \left. + 2a\frac{df(a,a')}{da}\left[e'^2 - \left(\frac{p-p'}{2}\right)^2 - \left(\frac{q-q'}{2}\right)^2\right]\right\}dt\\ & + m''an\left\{2a\frac{df_0(a,a'')}{da} + \left[2a\frac{df(a,a'')}{da} - f(a,a'')\right]e^2\right.\\ & + \left[2a\frac{df_1(a,a'')}{da} - \tfrac{1}{2}f_1(a,a'')\right]ee''\cos(\omega''-\omega)\\ & \left. + 2a\frac{df(a,a'')}{da}\left[e''^2 - \left(\frac{p-p''}{2}\right)^2 - \left(\frac{q-q''}{2}\right)^2\right]\right\}dt\\ & + \ldots\ldots\ldots\

Si, comme dans le calcul des inégalités des autres éléments de l'orbite de m, on n'avait eu égard qu'aux premières puissances des excentricités et des inclinaisons, l'équation (4) ne donnerait, par l'intégration, qu'un terme proportionnel au temps, qui, dans l'expression de la longitude moyenne, ne ferait que modifier le mouvement moyen; $\delta\varepsilon$ ne peut donc dépendre, par suite, que des termes en e^2, φ^2 ou p^2, q^2, que nous avons dû dès lors conserver.

Supposons que l'on ait substitué (n° 36), dans l'équation (4), à e^2, $e\sin\omega$, $e\cos\omega$, ..., leurs expressions (b^2+c^2), b, c, ... et à b, c, b', c' leurs valeurs approximatives limitées à la première puissance du temps, conformément à la méthode indiquée à la fin du n° 45, nous obtiendrons un résultat de la forme

$$d\delta\varepsilon = \mathrm{H}n\,dt + 2\mathrm{K}t\,dt,$$

H, K étant deux constantes dont les valeurs sont connues; on tire de là, en intégrant,

$$\delta\varepsilon = \mathrm{H}nt + \mathrm{K}t^2,$$

et l'on a, pour la longitude moyenne corrigée,

$$nt + \varepsilon + \delta\varepsilon = n(1+\mathrm{H})t + \mathrm{K}t^2.$$

Le terme $\mathrm{H}nt$ ne fait qu'augmenter le moyen mouvement primitif dans le rapport de $1+\mathrm{H}$ à l'unité, et le moyen mouvement corrigé semblerait répondre à la distance moyenne corrigée

$$\frac{a}{(1+\mathrm{H})^{\frac{2}{3}}};$$

mais, comme H est une très petite quantité, puisqu'elle est de l'ordre des masses $m, m', \ldots$, il ne résultera de là qu'une correction insensible, dont il est inutile de tenir compte dans les distances moyennes.

Il faudra, au contraire, tenir compte du terme $\mathrm{K}t^2$, qui constitue une véritable inégalité séculaire dans ε, par suite dans la longitude moyenne; toutefois, comme le coefficient K est du second ordre en m, m', m'', ..., il y a tout lieu de croire qu'il sera toujours peu considérable. Ainsi, si l'on considère Jupiter et Saturne, qui, par leur grand éloignement des autres planètes, ne sont soumis, pour ainsi dire, qu'à leurs trois actions mutuelles indépendamment de l'attraction solaire,

et qui sont les deux planètes dont les perturbations sont les plus considérables, on a, pour Jupiter, en évaluant t en années juliennes,

$$\delta\varepsilon = -\,0'',000000325\,t^2,$$

d'où l'on tire pour Saturne, au moyen de l'équation (10) du n° 43, mise sous la forme $m\sqrt{a}\,\delta\varepsilon + m'\sqrt{a'}\,\delta\varepsilon' = 0$, la valeur

$$\delta\varepsilon' = 0'',000001511\,4\,t^2.$$

Ces deux inégalités, ne s'élevant pas à $\frac{1}{60}$ de seconde par siècle, sont insensibles pour les plus anciennes observations qui nous sont parvenues.

Mais le même terme Kt^2 devient très sensible pour la Lune, troublée par le Soleil, dans son mouvement autour de la Terre; on a, en effet,

$$\delta\varepsilon = 0'',001020\,66\,t^2,$$

soit environ $10''$ par siècle, ce qui s'accorde assez bien avec l'observation, qui donne à peu près $9''$.

L'équation (4) peut s'intégrer dans le cas où l'on ne considère qu'une seule planète perturbatrice m'; en effet, nous avons démontré, à la fin du n° 46, que le terme en $(p'-p)^2+(q'-q)^2$ de cette équation est constant; de plus, nous avons, en nous reportant au n° 45,

$$\begin{aligned}
b = e\sin\omega &= G_1\sin(h_1t+k_1)+G_2\sin(h_2t+k_2),\\
c = e\cos\omega &= G_1\cos(h_1t+k_1)+G_2\cos(h_2t+k_2),\\
b' = e'\sin\omega' &= G_1\lambda'_1\sin(h_1t+k_1)+G_2\lambda'_2\sin(h_2t+k_2),\\
c' = e'\cos\omega' &= G_1\lambda'_1\cos(h_1t+k_1)+G_2\lambda'_2\sin(h_2t+k_2),\\
e^2 &= G_1^2+G_2^2+2G_1G_2\cos[(h_1-h_2)t+k_1-k_2],\\
e'^2 &= G_1^2\lambda'^2_1+G_2^2\lambda'^2+2G_1G_2\lambda'_1\lambda'_2\cos[(h_1-h_2)t+k_1-k_2],\\
ee'\cos(\omega'-\omega) &= bb'+cc'\\
&= G_1^2\lambda'_1+G_2^2\lambda'_2+G_1G_2(\lambda'_1+\lambda'_2)\cos[(h_1-h_2)t+(k_1-k_2)];
\end{aligned}$$

en substituant ces valeurs dans l'équation précitée, on obtient un résultat de la forme

$$d\varepsilon = \mathrm{M}n\,dt + \mathrm{N}\cos[(h_1-h_2)t+k_1-k_2],$$

M et N étant des coefficients connus; d'où, en faisant abstraction de

$Mn\,dt$, conformément à ce que nous avons dit plus haut,

$$\delta\varepsilon = \frac{N}{h_1 - h_2}\sin[(h_1 - h_2)t + k_1 - k_2].$$

Cette inégalité séculaire est périodique comme celle des autres éléments elliptiques; mais sa période, qui dépend de l'argument $(h_1 - h_2)$, est extrêmement longue et est égale notamment à 70414 années pour Jupiter et Saturne.

§ V. — Des perturbations du mouvement elliptique des comètes.

48. Les excentricités et les inclinaisons sur l'écliptique des orbites cométaires étant considérables, on ne peut plus appliquer, pour calculer leurs perturbations, le procédé que nous avons adopté pour les planètes, et qui est essentiellement basé sur le développement de la fonction perturbatrice, ordonné suivant les puissances ascendantes des excentricités et des inclinaisons.

La méthode dont on fait alors usage consiste à partager l'orbite en portions suffisamment petites, pour chacune desquelles on puisse calculer, au moyen des formules de quadratures par approximations, les altérations produites par les forces perturbatrices, exprimées en fonction des coordonnées de la comète et des planètes perturbatrices.

49. **Variations des éléments du mouvement elliptique des comètes.** — Nous négligerons, dans ce qui suit, les carrés et les produits deux à deux des forces perturbatrices, ce qui nous ramènera à déterminer les variations des éléments elliptiques de l'orbite cométaire dues à chacune des planètes perturbatrices comme si elle agissait seule.

Soient

Mx, My, Mz trois axes rectangulaires de directions fixes passant par le centre M du Soleil;

x, y, z les coordonnées à l'époque t de la comète m;

$m'X$, $m'Y$, $m'Z$ les composantes parallèles à ces axes de l'accélération qu'elle reçoit de la planète perturbatrice m'.

Si nous posons

$$(1)\qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C, \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = C', \quad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = C'',$$

nous avons, d'après un principe connu,

$$(2)\qquad \begin{cases} dC = m'(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\,dt, \\ dC' = m'(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z})\,dt, \\ dC'' = m'(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y})\,dt. \end{cases}$$

Il est évident que C, C′, C″ se rapportent aussi au mouvement elliptique que prendrait la comète au bout du temps t si la force perturbatrice venait subitement à s'annuler.

Nous prendrons pour plan xy celui de l'orbite de la comète correspondant à une certaine époque prise pour origine du temps; de sorte que z, C′, C″ et l'inclinaison φ seront de l'ordre de la force perturbatrice. Les équations (2) se réduisent, par suite, aux suivantes :

$$(2')\qquad \begin{cases} dC = m'(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\,dt, \\ dC' = -\,m'x\mathrm{Z}\,dt, \\ dC'' = m'y\mathrm{Z}\,dt. \end{cases}$$

Nous avons maintenant, dans le mouvement elliptique (1),

$$(3)\qquad \begin{cases} nt + \varepsilon - \omega = u - e\sin u, \\ r = \dfrac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(v-\omega)} = a(1 - e\cos u), \\ \cos(v-\omega) = -\dfrac{e - \cos u}{1 - e\cos u}, \\ \sin(v-\omega) = \dfrac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1 - e\cos u}; \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} dt = \dfrac{1 - e\cos u}{n}\,du = r\dfrac{du}{an} = ra^{\frac{1}{2}}\,du, \\ x = r\cos(v-\omega) = a(\cos u - e) = -\dfrac{r(e - \cos u)}{1 - e\cos u}, \\ y = r\sin(v-\omega) = a\sqrt{1-e^2}\sin u = \dfrac{r\sqrt{1-e^2}\sin u}{1 - e\cos u}, \\ dx = -\,a\sin u\,du = -\dfrac{y}{\sqrt{1-e^2}}\,du, \\ dy = a\sqrt{1-e^2}\cos u\,du = \sqrt{1-e^2}\,(x + ae)\,du. \end{cases}$$

(1) Voir les nos 13 et 15 pour l'établissement des trois premières formules du groupe (3) et la première du groupe (4). Les autres s'en déduisent sans difficulté.

Les équations (2) deviennent, en y remplaçant dt par sa valeur ci-dessus,

$$(5)\qquad \begin{cases} dC = m' r a^{\frac{1}{2}} (Yx - yX)\, du, \\ dC' = -m' r a^{\frac{1}{2}} Z x\, du, \\ dC'' = m' r a^{\frac{1}{2}} Z y\, du. \end{cases}$$

La partie variable du second membre de l'équation (11) du n° 2, qui est $-\frac{1}{a}$, augmentera au bout du temps dt de la quantité $-d\frac{1}{a}$, qui ne sera autre chose que le double du travail élémentaire de la force perturbatrice rapportée à l'unité de masse de la comète. Nous avons donc

$$(A)\qquad -d\frac{1}{a} = 2m'(X\,dx + Y\,dy);$$

d'où, en ayant égard aux valeurs de dx, dy, x, y données par les formules (4),

$$(A_1)\qquad \begin{cases} da = 2m'a^2(X\,dx + Y\,dy) = \dfrac{2m'a^2}{\sqrt{1-e^2}}[-Xy + Y(x+ae)(1-e^2)]\,du \\ \qquad\qquad = 2m'a^3\left(-X\sin u + Y\sqrt{1-e^2}\cos u\right)du. \end{cases}$$

On déduit de là, au moyen de la relation $n = a^{-\frac{3}{2}}$,

$$(A_2)\qquad dn = 3m'a^2 n\left(X\sin u - Y\sqrt{1-e^2}\cos u\right)du.$$

Si l'on se rappelle (n° 2) que $k = \sqrt{a(1-e)^2}$ représente, dans le mouvement elliptique, le double de l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon vecteur, et qu'on peut prendre $\cos\varphi = 1$, on a

$$(6)\qquad \begin{cases} C = k\cos\varphi = k = \sqrt{a(1-e^2)}, \\ C' = -k\sin\varphi\cos\alpha \quad (1), \\ C'' = k\sin\varphi\sin\alpha \quad (1), \\ \operatorname{tang}\alpha = -\dfrac{C''}{C'}, \\ \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{\sqrt{C'^2 + C''^2}}{k}. \end{cases}$$

(1) Voir la note des pages 123 et 124.

Si nous posons, comme au n° 39,

$$p = \operatorname{tang}\varphi \sin\alpha, \quad q = \operatorname{tang}\varphi \cos\alpha,$$

ces deux quantités pourront être considérées comme étant respectivement égales à $\sin\varphi \sin\alpha$, $\sin\varphi \cos\alpha$, et nous aurons, en ayant égard à la seconde et à la troisième des formules (5) et à la valeur $k = \sqrt{a(1-e^2)}$,

$$(A_3) \quad \begin{cases} dp = \dfrac{d\mathrm{C}''}{k} = m' r \dfrac{\mathrm{Z}y\,du}{\sqrt{1-e^2}}, \\ dq = -\dfrac{d\mathrm{C}'}{k} = m' r \dfrac{\mathrm{Z}x\,du}{\sqrt{1-e^2}}. \end{cases}$$

En différentiant, par rapport aux constantes, la première équation (6), en ayant égard à la première des formules (5), on trouve

$$(1-e^2)\,da - 2ae\,de = 2m'a\sqrt{1-e^2}\,r(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\,du,$$

et, en remplaçant da par la première de ses valeurs (A_1),

$$e\,de = m'\sqrt{1-e^2}\,\{(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)(a-r) + \mathrm{Y}ae[-ex + a(1-e^2)]\}\,du;$$

d'où, ayant égard aux valeurs (3) et (4) de r et de x en fonction de u',

$$(A_4) \quad \begin{cases} de = m'a^2\sqrt{1-e^2}\,[(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\cos u + \mathrm{Y}r]\,du \\ \quad = m'a^2\sqrt{1-e^2}\,[\mathrm{Y}(1 - 2e\cos u + \cos^2 u) - \mathrm{X}\sqrt{1-e^2}\sin u\cos u]\,du. \end{cases}$$

Si l'on différentie l'équation $r = a(1 - e\cos u)$ dans le mouvement troublé et le mouvement elliptique et que l'on fasse la différence des du, on arrivera au même résultat que si l'on avait différentié en faisant uniquement varier les constantes. Il vient donc, en désignant par $\overline{du}$ la portion de la différentielle de u dépendant de da et de de,

$$(7) \qquad \overline{du} = \frac{a\cos u\,de - (1 - e\cos u)\,du}{ae\sin u}.$$

Si l'on différentie de la même manière, par rapport aux constantes, la valeur de $\sin(\varphi - \omega)$ donnée par la quatrième des équations (3), en ayant égard à la troisième, on trouve

$$(8) \qquad d\omega = -\frac{1}{\sqrt{1-e^2}\,(1 - e\cos u)}\,[\sin u\,de + (1-e^2)\,\overline{du}]$$

ou, en substituant à $\overline{du}$ sa valeur (7),

$$(8') \qquad d\omega = \frac{(1-e^2)\,da - a(e+\cos u)\,de}{ae\sqrt{1-e^2}\sin u}.$$

Si l'on substitue dans cette expression les valeurs (A_1) et (A_4) de da, de, qui renferment x, y, il vient

$$\begin{aligned} e\,d\omega &= \frac{m'a}{\sin u}\left[(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)(2 - e\cos u - \cos^2 u) + \mathrm{Y}r(e - \cos u)\right] du \\ &= \frac{m'a}{\sin u}\left[(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)(2 - e\cos u - \cos^2 u) - \mathrm{Y}x(1 - e\cos u)\right] du \\ &= \frac{m'a}{\sin u}\left[\mathrm{Y}x\sin^2 u - \mathrm{X}y(2 - e\cos u - \cos^2 u)\right] du \\ &= \frac{m'a}{\sin u}\left[(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\sin^2 u - \mathrm{X}y(1 - e\cos u)\right] du \\ &= \frac{m'a}{\sin u}\left[(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\sin^2 u - \mathrm{X}r\sqrt{1-e^2}\sin u\right] du. \end{aligned}$$

Nous avons donc enfin

$$(A_5) \qquad e\,d\omega = m'a\left[(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\sin u - \sqrt{1-e^2}\,\mathrm{X}r\right] du.$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à calculer la longitude de l'époque. Si l'on différentie la première des équations (3), comme on l'a fait ci-dessus, c'est-à-dire par rapport à u et aux constantes seulement, on a

$$d\varepsilon - d\omega = (1 - e\cos u)\,\overline{du} - \sin u\,de - t\,dn,$$

expression dans laquelle il est inutile d'avoir égard au terme $-t\,dn$, attendu qu'il disparaît, dans la variation

$$n\,dt + t\,dn + d\varepsilon - d\omega,$$

de la longitude moyenne où entre uniquement ε. Nous prendrons donc simplement

$$d\varepsilon - d\omega = (1 - e\cos u)\,\overline{du} - \sin u\,de;$$

si, dans cette formule, on remplace $\overline{du}$ par sa valeur (7), on trouve

$$(A_6) \qquad \begin{cases} d\varepsilon - \left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) d\omega \\ \quad = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[(2 - e\cos u)\cos u - e\right] e\,d\omega - \dfrac{2 - e\cos u - e^2}{1-e^2}\sin u\,de. \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à substituer dans le second membre de cette équation les valeurs de $e\,d\omega$, de, que nous avons obtenues plus haut. On trouve d'abord, sans difficulté,

$$\frac{d\varepsilon - (1-\sqrt{1-e^2})\,d\omega}{am'\,du} = -\frac{(Yx - Xy)\,e(1-e\cos u)\sin u}{\sqrt{1-e^2}} - [(2-e\cos u)\cos u - e]\,rX - (2-e\cos u - e^2)\,Yr\,\frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2}}.$$

En remarquant que $(1-e\cos u) = \frac{r}{a}$, r se trouvera en facteur commun devant X et Y et, en substituant ensuite à x, y leurs valeurs en fonction de u données par les équations (4), on obtient pour résultat

$$\frac{d\varepsilon - (1-\sqrt{1-e^2})\,d\omega}{am'\,du} = -2Yr\,\frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2}} + 2Xr(e-\cos u)$$

et enfin

$$(A_7) \qquad d\varepsilon = (1-\sqrt{1-e^2})\,d\omega - 2m'r\,(Xx+Yy)\,du.$$

On calculera, au moyen des formules précédentes $(A_1), \ldots, (A_7)$, les altérations des éléments de l'orbite de la comète par l'une ou l'autre des méthodes connues de quadrature par approximation : 1° lorsqu'on aura exprimé r, x, y au moyen des formules (3) et (4) en fonction de la variable u à laquelle on donnera différentes valeurs numériques; 2° lorsqu'on aura déterminé les valeurs correspondantes des coordonnées de la planète perturbatrice qui entrent dans les expressions de X, Y, Z, ce dont nous allons maintenant nous occuper.

Soient

x', y', z' les coordonnées de la planète m';

r' son rayon vecteur Mm';

δ l'inclinaison de l'orbite de la planète sur le plan de celle de la comète;

λ la longitude du nœud ascendant N de la planète mesurée sur ce dernier plan à partir de la ligne des absides de la comète prise pour axe des x;

φ' l'angle formé par le rayon vecteur r' avec la ligne des nœuds MN.

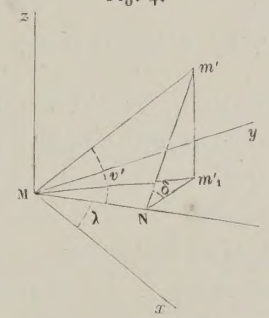
Nous avons (¹)

$$(9)\qquad \begin{cases} x' = r'\cos\varphi'\cos\lambda - r'\sin\varphi'\sin\lambda\cos\delta, \\ y' = r'\cos\varphi'\sin\lambda + r'\sin\varphi'\cos\lambda\cos\delta, \\ z' = r'\sin\varphi'\sin\delta, \end{cases}$$

(¹) Il est facile de retrouver directement ces formules en faisant seulement appel à la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique.

Soient (*fig.* 4) m'_1, N les projections de m' sur le plan xy et sur la ligne des nœuds.

Fig. 4.



Le triangle sphérique rectangle formé par les droites Mm', Mm'_1, MN donne

$$\cos(m', m'_1) = \cos\varphi'\cos(m'_1, N) + \sin\varphi'\sin(m'_1, N)\cos\delta,$$
$$\cos\varphi' = \cos(m', m'_1)\cos(m'_1, N).$$

En multipliant entre elles ces deux équations, on trouve

$$\operatorname{tang}(m'_1, N) = \operatorname{tang}\varphi'\cos\delta;$$

par suite,

$$\sin(m'_1, N) = \frac{\sin\varphi'\cos\delta}{\sqrt{1-\sin^2\varphi'\cos^2\delta}}, \quad \cos(m'_1, N) = \frac{\cos\varphi'}{\sqrt{1-\sin^2\varphi'\cos^2\delta}}.$$

En portant ces dernières valeurs dans la première des formules que nous avons établies, on trouve

$$\cos(m', m'_1) = \sqrt{1-\sin^2\varphi'\sin^2\delta}, \quad \text{d'où} \quad \sin(m', m'_1) = \sin\varphi'\sin\delta.$$

Nous avons donc déjà

$$z' = r'\sin(m', m'_1) = r'\sin\varphi'\sin\delta.$$

Si nous remarquons que

$$MN = r'\cos\varphi', \quad m'_1N = MN\operatorname{tang}(m'_1, N) = r'\sin\varphi'\cos\delta,$$

nous avons, en projetant ces deux droites sur Mx,

$$x' = r'\cos\varphi'\cos\lambda - r'\sin\varphi'\sin\lambda\cos\delta.$$

Pour obtenir y', il suffira de remplacer dans le second membre de cette valeur λ par $-(90^\circ - \lambda)$, d'où

$$y' = r'\cos\varphi'\sin\lambda + r'\sin\varphi'\cos\lambda\cos\delta.$$

avec la relation

$$r' = \frac{a'(1 - e'^2)}{1 + e' \cos(\varphi' - \omega')}. \tag{10}$$

Les constantes δ et λ se détermineront d'après les positions relatives et connues des orbites de la comète et de la planète; d'autre part, si l'on prend pour origine du temps l'instant du passage de la comète au périhélie, l'angle $\varepsilon - \omega$ devenant nul, la première des formules (3) nous donnera simplement

$$t = a^{\frac{3}{2}}(u - e \sin u) \tag{11}$$

pour le temps, en fonction de u, écoulé depuis le passage au périhélie, et les Tables astronomiques feront connaître les valeurs de r', φ' correspondant à celles de t qui seront calculées d'après cette formule.

50. Calcul de la variation éprouvée par la durée de la révolution complète d'une comète. — Désignons par N la valeur de n à l'instant du passage au périhélie pris pour origine du temps (valeur qui représenterait la vitesse angulaire moyenne du rayon vecteur si le mouvement elliptique n'était pas troublé) et par ζ l'anomalie moyenne.

Nous poserons

$$\zeta = \int_0^t n\, dt,$$

$$n = \mathrm{N} + \delta n,$$

$$(\delta\zeta)_t = \int_0^t \delta n\, dt.$$

Nous aurons

$$\zeta = \mathrm{N}t + (\delta\zeta)_t.$$

La variation $(\delta\zeta)_t$, éprouvée par le mouvement moyen ζ au bout du temps t, se calculera par une double quadrature, en substituant à δn sa valeur

$$\delta n = 3 m' a^2 \mathrm{N} \int_0^u (\mathrm{X} \sin u - \mathrm{Y}\sqrt{1 - e^2} \cos u)\, du,$$

déduite de la formule (A_2) du numéro précédent.

Soient

T, T′ les intervalles de temps qui séparent respectivement le premier passage au périhélie, pris pour origine du temps, du second passage et le second du troisième;

N′ la valeur de n au second passage;

$(\delta n)_t$ la variation éprouvée par n au bout du temps t.

Nous pourrons supposer

$$(\delta\zeta)_{T+T'} = (\delta\zeta)_{2T},$$

en négligeant les termes du second ordre relatifs aux masses m et m', et nous aurons

$$(12)\qquad \begin{cases} 2\pi = NT + (\delta\zeta)_T, \\ N' = N + (\delta n)_T, \\ 2\pi = N'T' + (\delta\zeta)_{T+T'} - (\delta\zeta)_T = N'T' + (\delta\zeta)_{2T} - (\delta\zeta)_T. \end{cases}$$

La première de ces équations fera connaître N si T est donné par l'observation; la valeur de N′ étant fournie par la seconde, la troisième permettra de prédire, par la valeur que l'on déduira pour T′, le troisième passage au périhélie.

51. Développements en séries des perturbations d'une comète lorsqu'elle s'éloigne beaucoup du périhélie. — Si l'on considère une portion de l'orbite cométaire dont la distance de chaque point au Soleil soit très grande par rapport à celle de la planète perturbatrice m' à cet astre, on peut remplacer la méthode précédente, qui dans l'application conduit à de longs calculs, par la suivante, qui est basée sur le développement de la fonction perturbatrice en série.

On a, d'après le n° 37,

$$R = m'\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right),$$

en se rappelant que ρ', r' représentent respectivement les distances $\overline{mm'}$, $\overline{Mm'}$.

Désignons par θ l'angle formé par $r = \overline{Mm}$ avec r'; on a

$$\rho' = \sqrt{r'^2 - 2rr'\cos\theta + r^2}$$

ou

$$\rho' = r - r' \cos\theta,$$

aux termes du second ordre près en $\frac{r'}{r}$.

On déduit de là, avec la même approximation,

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r\left(1 - \frac{r'}{r}\cos\theta\right)} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r'}{r}\cos\theta\right) = \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}\cos\theta,$$

et, comme on a

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

il vient

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r} + \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}.$$

La fonction perturbatrice prend, par suite, la forme suivante :

$$\text{(13)} \qquad R = m'\left[\frac{1}{r} + (xx' + yy' + zz')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\right].$$

L'équation du mouvement troublé qui se rapporte à l'axe Mx, ou (n° 37)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = \frac{dR}{dx},$$

devient, par suite,

$$\text{(14)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = m'\left[\frac{x' - x}{r^3} - \frac{x'}{r'^3} - \frac{3x}{r^5}(xx' + yy' + zz')\right].$$

Admettons maintenant que x, y, z représentent les coordonnées de la position qu'occuperait la comète si son mouvement n'était pas troublé, et soient $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ les coordonnées de sa position réelle, les quantités δx, δy, δz étant, de même que la variation δr de r, de l'ordre de la force perturbatrice.

Nous devrons, dans l'équation (14), remplacer x, y, z respectivement par $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, et nous obtiendrons ainsi

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{\delta x}{r^3} - 3x\frac{\delta r}{r^4} = m'\left[\frac{x' - x}{r^3} - \frac{x'}{r'^3} - \frac{3x}{r^5}(xx' + yy' + zz')\right];$$

Mais on a

$$\delta r = \frac{x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z}{r};$$

par suite,

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + m'\left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3}\right) = (\delta x - m'x')\left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + 3(\delta y - m'y')\frac{xy}{r^5} + 3(\delta z - m'z')\frac{xz}{r^5}.$$

Nous pouvons remplacer dans le second terme du premier membre de cette équation $\frac{x}{r^3}$, $\frac{x'}{r'^3}$ par leurs valeurs $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2x'}{dt^2}$ estimées dans les mouvements elliptiques, et alors nous avons

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\delta x}{dt^2} - m'\dfrac{d^2x}{dt^2} - m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} \\ \qquad = (\delta x - m'x')\left(\dfrac{3x^2}{r^5} - \dfrac{1}{r^3}\right) + 3(\delta y - m'y')\dfrac{xy}{r^5} + 3(\delta z - m'z')\dfrac{xz}{r^5} \end{cases}$$

et deux équations semblables pour les coordonnées y et z. Ces trois équations, abstraction faite du premier membre, seront satisfaites par $\delta x = m'x'$, $\delta y = m'y'$, $\delta z = m'z'$, ce qui nous conduit à poser

$$\delta x = m'x' + \xi, \quad \delta y = m'y' + \eta, \quad \delta z = m'z' + \zeta.$$

L'équation (15) devient alors

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - m'\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)\xi + \frac{3xy}{r^5}\eta + \frac{3xz}{r^5}\zeta,$$

et sera satisfaite, dans le mouvement elliptique, par

$$\xi = \frac{m'x}{3}, \quad \eta = \frac{m'y}{3}, \quad \zeta = \frac{m'z}{3};$$

il en sera de même des équations différentielles en η et ζ. Nous avons donc enfin

$$(16)\qquad \delta x = m'\left(x' + \frac{x}{3}\right), \quad \delta y = m'\left(y' + \frac{y}{3}\right), \quad \delta z = m'\left(z' + \frac{z}{3}\right),$$

d'où nous déduisons

$$(17)\qquad \delta r = m'\left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r} + \frac{r}{3}\right).$$

Dorénavant nous ferons abstraction du terme $\frac{m'}{r}$ de R, car il correspond à la force $\frac{m'}{r^2}$, dirigée de m vers M, qui vient s'ajouter à l'attraction solaire $\frac{M}{r^2}$; cette force ne trouble donc pas le mouvement elliptique et n'a pour effet que de modifier d'une manière insignifiante le coefficient μ du n° 2, que nous continuerons à supposer égal à l'unité.

Le second membre de l'équation (14) se réduit ainsi à

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx} = m'\left[x'\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) - \frac{3x}{r^5}(xx' + yy' + zz')\right]. \tag{18}$$

Proposons-nous maintenant de déterminer l'inégalité du grand axe de l'orbite planétaire en nous reportant à l'équation (A) du n° 49. Nous avons, aux termes du second ordre près,

$$\begin{aligned} m'(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy) &= \frac{d\mathrm{R}}{dx}\,dx + \frac{d\mathrm{R}}{dy}\,dy \\ &= m'\left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(x'\,dx + y'\,dy) + (xx' + yy')\,d\frac{1}{r^3}\right] \\ &= m'\left(d\frac{xx' + yy'}{r^3} - \frac{x\,dx' + y\,dy'}{r^3} - \frac{x'\,dx + y'\,dy}{r'^3}\right). \end{aligned}$$

et, dans le mouvement elliptique,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{r^3} &= -\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{y}{r^3} = -\frac{d^2y}{dt^2}, \\ \frac{x'}{r'^3} &= -\frac{d^2x'}{dt^2}, \quad \frac{y'}{r'^3} = -\frac{d^2y'}{dt^2}; \end{aligned}\right. \tag{19}$$

par suite,

$$m'(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy) = m'\,d\left(\frac{xx' + yy'}{r^3} + \frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}\right).$$

En introduisant cette expression dans l'équation (A) et intégrant, on trouve

$$\frac{1}{a} = -2m'\left(\frac{xx' + yy'}{r^3} + \frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}\right)_0 + \frac{1}{a_0},$$

l'indice o caractérisant les quantités qui se rapportent à une époque déterminée t_0. Si nous posons $a = a_0 + \delta a$, nous trouvons, pour l'iné-

galité de la distance moyenne,

$$(B_1) \qquad \delta a = 2m'a_0^2\left(\frac{xx'+yy'}{r^3}+\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}\right)_0.$$

On déduit de là, au moyen de la relation $n = a^{-\frac{3}{2}}$,

$$(B_2) \qquad \delta n = -3m'a_0^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{xx'+yy'}{r^3}+\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}\right)_0.$$

En ayant égard à la formule (18) et à celle qui s'en déduisent relativement à y et z, les équations (2′) du n° 49 deviennent, au degré d'approximation convenu,

$$\begin{aligned} d\mathrm{C} &= m'(xy'-yx')\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)dt,\\ d\mathrm{C}' &= -m'xz'\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)dt,\\ d\mathrm{C}'' &= m'yz'\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)dt \end{aligned}$$

où, en vertu des relations (19),

$$\begin{aligned} d\mathrm{C} &= m'\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy'}{dt}-y\frac{dx'}{dt}+x'\frac{dy}{dt}-y'\frac{dx}{dt}\right)dt,\\ d\mathrm{C}' &= m'\frac{d}{dt}\left(z'\frac{dx}{dt}-x\frac{dz'}{dt}\right)dt,\\ d\mathrm{C}'' &= -m'\frac{d}{dt}\left(z'\frac{dy}{dt}-y\frac{dz'}{dt}\right)dt; \end{aligned}$$

on déduit de là

$$(20) \qquad \begin{cases} \delta\mathrm{C} = m'\left(x\dfrac{dy'}{dt}-y\dfrac{dx'}{dt}+x'\dfrac{dy}{dt}-y'\dfrac{dx}{dt}\right),\\ \delta\mathrm{C}' = m'\left(z'\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz'}{dt}\right),\\ \delta\mathrm{C}'' = -m'\left(z'\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dz'}{dt}\right). \end{cases}$$

Les formules (A_3) du n° 49 donnent ensuite, en faisant $k = \sqrt{a(1-e^2)}$,

$$(B_3) \qquad \delta p = \frac{\delta\mathrm{C}''}{\sqrt{a(1-e^2)}}, \quad \delta q = -\frac{\delta\mathrm{C}'}{\sqrt{a(1-e^2)}}.$$

Supposons que l'on rabatte, en le faisant tourner autour de la ligne des nœuds, le plan de l'orbite elliptique de la comète sur le plan xy, et que l'on prenne pour axe des x le grand axe de l'ellipse correspondant à l'époque où elle se trouvait dans ce dernier plan. La longitude du périhélie ω étant de l'ordre de m', nous pourrons en négliger le carré, et l'équation de l'ellipse, qui se rapporte au temps t, ou

$$r[1+e\cos(v-\omega)]=a(1-e^2)=C^2,$$

prendra la forme

$$(a)\qquad ex+e\omega y=C^2-r.$$

En différentiant cette équation par rapport au temps dans le mouvement elliptique, il vient

$$(b)\qquad e\frac{dx}{dt}+e\omega\frac{dy}{dt}=-\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{r}.$$

Si à cette équation multipliée par y on ajoute la suivante,

$$(c)\qquad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C,$$

après l'avoir multipliée par e, on trouve

$$(e\omega y+ex)\frac{dy}{dt}=-\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)\frac{y}{r}+Ce,$$

ou, en vertu de la valeur (a),

$$(C^2-r)\frac{dy}{dt}=-\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)\frac{y}{r}+Ce,$$

$$C^2\frac{dy}{dt}=\frac{x}{r}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+Ce=\frac{Cx}{r}+Ce;$$

par suite,

$$(d)\qquad e=-\frac{x}{r}+C\frac{dy}{dt}.$$

En retranchant maintenant l'une de l'autre les équations (b) et (c),

multipliées respectivement par x et $e\omega$, on obtient successivement

$$(ex+e\omega y)\frac{dx}{dt}=-\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)\frac{x}{r}-\mathrm{C}e\omega,$$

$$(\mathrm{C}^2-r)\frac{dx}{dt}=-\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)\frac{x}{r}-\mathrm{C}e\omega,$$

$$\mathrm{C}^2\frac{dx}{dt}=\frac{y}{r}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)-\mathrm{C}e\omega=-\frac{\mathrm{C}y}{r}-\mathrm{C}e\omega,$$

d'où

$$(d')\qquad e\omega=-\frac{y}{r}-\mathrm{C}\frac{dx}{dt}.$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, la valeur initiale de ω étant nulle, nous avons

$$(e)\qquad \delta.e\omega=e\,\delta\omega.$$

De l'équation (d) on tire

$$\delta e=x\frac{\delta r-r\,\delta x}{r^2}+\mathrm{C}\frac{d\,\delta y}{dt}+\frac{dy}{dt}\delta\mathrm{C}$$

et, en substituant aux variations leurs valeurs données par les formules (16) et (20) et ayant égard à la relation (c),

$$(\mathrm{B}_4)\quad\left\{\begin{aligned}\delta e=m'\Bigg[&\frac{x}{r^3}(xx'+yy')-\frac{x'}{r}+\left(\frac{dy'}{dt}+\frac{1}{3}\frac{dy}{dt}\right)\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\\&+\left(x\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx}{dt}+x'\frac{dy}{dt}-y\frac{dx'}{dt}\right)\frac{dy}{dt}\Bigg].\end{aligned}\right.$$

On a de même

$$\delta.e\omega=m'\left(\frac{y\,\delta r-r\,\delta y}{r^2}-\mathrm{C}\frac{d\,\delta x}{dt}-\frac{dx}{dt}\delta\mathrm{C}\right)$$

ou

$$(\mathrm{B}_5)\quad\left\{\begin{aligned}e\,\delta\omega=m'\Bigg[&\frac{y}{r^3}(xx'+yy')-\frac{y'}{r}-\left(\frac{dx'}{dt}+\frac{1}{3}\frac{dx}{dt}\right)\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\\&-\left(x\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx}{dt}+x'\frac{dy}{dt}-y\frac{dx'}{dt}\right)\frac{dx}{dt}\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à calculer l'altération de l'ano-

malie moyenne, définie dans le mouvement elliptique par

$$\zeta = nt + \varepsilon - \omega.$$

Dans le mouvement troublé, nous aurons

$$d\zeta = t\,dn + n\,dt + d\varepsilon - d\omega;$$

mais nous avons fait remarquer au n° 34 qu'il n'y avait pas lieu de tenir compte du premier terme de cette expression; il vient donc, en intégrant,

$$\zeta = \int n\,dt + \varepsilon - \omega,$$

d'où, en spécifiant que la caractéristique δ ne doit s'appliquer qu'aux termes de l'ordre de la fonction perturbatrice,

$$\delta\zeta = \int \delta n\,dt + \delta\varepsilon - \delta\omega.$$

Nous supposerons que l'origine du temps est l'instant du passage de la comète au point de l'orbite à partir duquel on peut obtenir une valeur approchée (13) de la fonction perturbatrice.

L'équation (A_6) peut se mettre sous la forme

$$d\varepsilon - d\omega = -\frac{(1 - e\cos u)^2}{\sqrt{1-e^2}}\,d\omega - \frac{2 - e\cos u - e^2}{1-e^2}\sin u\,de.$$

Par l'intégration, en considérant les coefficients comme constants, on obtiendra l'expression de $(\delta\varepsilon - \delta\omega)$, qu'on portera dans celle de $\delta\zeta$, et l'on aura

$$\delta\zeta = \int \delta n\,dt - \frac{(1 - e\cos u)^2}{\sqrt{1-e^2}}\,\delta \quad - \frac{2 - e\cos u - e^2}{1-e^2}\sin u\,\delta e,$$

formule dans laquelle on remplacera δn par sa valeur (B_4), et l'on n'aura plus qu'à effectuer une quadrature par approximation.

52. Proposons-nous maintenant de calculer les parties des inégalités qui dépendent de l'ensemble des termes du développement en série de la fonction perturbatrice que nous avons négligée. Nous avons

$$R = m'\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right),$$

$$\rho' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz')},$$

et, en développant en série suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{r}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho'} &= \frac{1}{r}\left[1 - \frac{2}{r'^2}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{1}{r'^2}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right) + \frac{3}{r'^4}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{5}{r'^6}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right)^2 + \dots\right].\end{aligned}$$

Nous avons donc, par suite,

$$\begin{aligned}\mathrm{R} &= m'\left[\frac{1}{r} + (xx' + yy' + zz')\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r'^2}\right)\right] \\ &\quad + m'\left[-\frac{r'^2}{2r'^3} + \frac{3}{r'^5}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{5}{r'^7}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right)^3 + \dots\right];\end{aligned}$$

mais, comme nous avons calculé les inégalités qui dépendent du premier terme de cette expression, il nous suffira de poser

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{R} &= m'\left[-\frac{r'^2}{2r'^3} + \frac{3}{r'^5}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{5}{r'^7}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right)^3 + \dots\right].\end{aligned}\right.$$

De là on déduit

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{d\mathrm{R}}{dx} &= m'\mathrm{X} = m'(\mathrm{P}x + \mathrm{P}'x'), \\ \frac{d\mathrm{R}}{dy} &= m'\mathrm{Y} = m'(\mathrm{P}y + \mathrm{P}'y'), \\ \frac{d\mathrm{R}}{dz} &= m'\mathrm{Z} = m'(\mathrm{P}z + \mathrm{P}'z'),\end{aligned}\right.$$

en désignant par P et P′ les fonctions

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{P} &= \frac{3}{2}\frac{r'^2}{r'^5} - \frac{15}{r'^7}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right)^2 - \frac{35}{r'^9}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right)^3 + \dots, \\ \mathrm{P}' &= \frac{6}{r'^3}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right) + \frac{15}{r'^5}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r'^2}{2}\right)^2 + \dots,\end{aligned}\right.$$

qui sont symétriques en x, y, z et en x', y', z'.

Substituant, en y faisant $z = 0$, ces valeurs dans les équations (A), (A_3), (A_4), (A_5), (A_7) du n° 49, on obtient les suivantes :

$$(C) \qquad da = 2m'a^2[P(x\,dx + y\,dy) + P'(x'\,dx + y'\,dy)];$$

$$(C_3) \qquad \begin{cases} dp = m' \dfrac{r\,yz'P'}{\sqrt{1-e^2}}\,du, \\ dq = m' \dfrac{r\,xz'P'}{\sqrt{1-e^2}}\,du; \end{cases}$$

$$(C_4) \qquad de = m'a\sqrt{1-e^2}\,[P'(xy' - yx')\cos u + r(Py + P'y')]\,du;$$

$$(C_5) \qquad e\,d\omega = m'a\big[P'(xy' - yx')\sin u - r\sqrt{1-e^2}(Px + P'x')\big]\,du;$$

$$(C_7) \qquad d\varepsilon = (1 - \sqrt{1-e^2})\,d\omega - 2m'r[P(x^2 + y^2) + P'(xx' + yy')]\,du.$$

En ayant égard à la première des formules (4) du n° 49, les équations (C_3) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(C'_3) \qquad \begin{cases} dp = \dfrac{m'yz'P'}{\sqrt{a(1-e^2)}}\,dt, \\ dq = \dfrac{m'xz'P'}{\sqrt{a(1-e^2)}}\,dt. \end{cases}$$

Nous avons aussi, en vertu de la quatrième et de la troisième des mêmes formules,

$$a\sqrt{1-e^2}\cos u\,du = dy, \quad a\sin u\,du = -dx$$

et, de plus,

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{a(1-e^2)}\,dt = a\sqrt{1-e^2}\,r\,du,$$

et les équations (C_4) et (C_5) peuvent alors s'écrire ainsi

$$(C'_4) \qquad de = m'[P'(xy' - yx')\,dy + (Py + P'y')\,(x\,dy - y\,dx)],$$

$$(C'_5) \qquad e\,d\omega = m'[P'(yx' - xy')\,dx + (Px + P'x')\,(y\,dx - x\,dy)].$$

Enfin, en remplaçant, dans l'équation (C_7), du par sa valeur en fonction de dt, il vient

$$(C'_7) \qquad d\varepsilon = (1 - \sqrt{1-e^2})\,d\omega - 2m'a\sqrt{1-e^2}\,[P(x^2 + y^2) + P'(xx' + yy')]\,dt,$$

Si maintenant on fait, dans les formules (C), (C'_3), (C'_4), (C'_5), (C'_7),

$$x = r\cos v, \qquad y = r\sin v,$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \quad r' = \frac{a'(1-e'^2)}{1+e'\cos(v'-\omega')},$$

puis que l'on remplace x', y', z' par leurs valeurs (9) du n° 49, en observant que l'on a

$$r^2\,dv = \sqrt{a(1-e^2)}\,dt, \quad r'^2\,dv' = a\sqrt{1-e'^2}\,dt, \tag{24}$$

on voit que les expressions ci-dessus des inégalités de l'orbite cométaire pourront se développer en une suite de termes de la forme

$$m'\mathrm{J}\cos(iv + i'v' + j)\,dv.$$

Comme, dans la portion de l'orbite que nous considérons, le mouvement de la comète est relativement lent, $i'v'$ pourra, en général, être négligé devant iv, et alors les intégrations pourront s'effectuer.

Toutefois on peut tenir compte approximativement de $i'v'$ en opérant comme il suit.

Des équations (24) on déduit

$$dv = \frac{r'^2}{r^2}\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{a'(1-e'^2)}}\,dv',$$

et l'on est ramené à considérer l'intégrale

$$\int \frac{r'^2}{r^2}\cos(iv + i'v' + j)\,dv'. \tag{25}$$

Mais on a

$$\frac{r'^2}{r^2} = \frac{a'^2}{a^2}\,\frac{1-e'^2}{1-e^2}\,\frac{(1+e\cos v)^2}{[1+e'\cos(v'-\omega')]^2}, \tag{26}$$

et, comme l'excentricité e' est une petite fraction, on pourra développer cette expression suivant les puissances ascendantes de e'; alors l'intégrale (25) pourra elle-même se développer en une suite de termes de

la forme

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{J}_1 f \cos(i_1 v + i'_1 v' + j_1)\, dv' \\ \quad = \dfrac{\mathrm{J}_1}{i'_1} f \cos(i_1 v + i'_1 v' + j_1)\,(i'_1\, dv' + i_1\, dv - i_1\, dv) \\ \quad = \dfrac{\mathrm{J}_1}{i'_1} \sin(i_1 v + i'_1 v' + j_1) - \dfrac{\mathrm{J}_1 i_1}{i'_1} f \cos(i_1 v + i'_1 v' + j_1)\, dv. \end{array}\right.$$

Or le second terme de cette expression, qui, en ayant égard à la valeur ci-dessus de dv, se met sous la forme

$$-\mathrm{J}_1 \frac{i_1}{i'_1} \sqrt{\frac{a'(1-e^2)}{a'(1-e'^2)}} \int \frac{r'^2}{r^2} \cos(i_1 v + i'_1 v' + j')\, dv',$$

sera généralement beaucoup plus petit que

$$\mathrm{J}_1 f \cos(i_1 v + i'_1 v' + j_1)\, dv',$$

en raison de la petitesse du rapport $\dfrac{r'^2}{r^2}\sqrt{\dfrac{a}{a'}}$.

On peut donc considérer l'intégrale (27) comme étant approximativement égale à

$$\frac{\mathrm{J}_1}{i'_1} \sin(i_1 v + i'_1 v' + j_1).$$

CHAPITRE III.

CALCUL DE L'ATTRACTION DES CORPS.

§ I. — Généralités sur l'attraction des systèmes matériels.

53. Lorsqu'on veut chercher à rattacher à la gravitation la forme particulière, et pour ainsi dire géométrique, qu'affectent les corps célestes lancés dans l'espace, les phénomènes qu'ils présentent, soit dans leur mouvement sur eux-mêmes, soit dans celui des fluides qui en recouvrent la surface, il convient d'abord de chercher à calculer les résultantes des attractions exercées par les particules d'un corps sur les éléments matériels d'un autre corps ou, plus simplement encore, la résultante des actions qui émanent du premier corps sur chacune des molécules du second, et c'est ce qui fait l'objet de ce Chapitre.

54. **Expressions des composantes parallèles à trois axes rectangulaires, de l'attraction d'un système matériel sur un point matériel.** — Soient

m', m'_1, m'_2, ... les masses élémentaires du système dont nous représenterons la masse totale par M';

r, r_1, r_2, ... leurs distances respectives au point matériel de masse m sur lequel elles exercent leur attraction;

x, y, z les coordonnées du point m parallèles à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz fixes dans l'espace.

Si nous supposons que la loi de l'attraction soit, entre deux masses égales à l'unité, représentée par une fonction quelconque $\varphi(r)$ de la distance r, l'attraction exercée par m' sur m sera $mm'\varphi(r)$, et, pour un dé-

placement de m par rapport à M′ considéré comme fixe, son travail total sera

$$-mm'f\varphi(r)dr.$$

En désignant par V la somme des travaux semblables des attractions de tous les éléments matériels de M′ sur m, nous aurons

$$V = -mSm'f\varphi(r)dr,$$

le symbole S ayant la signification ordinaire de *somme*.

Soient X, Y, Z les composantes de l'attraction totale de M′ sur m; le travail élémentaire de cette attraction, représenté par dV, étant égal à la somme des travaux élémentaires de ses composantes, on a

$$dV = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz;$$

mais, comme V est une fonction de r_1, r_2, r_3, ... et par suite des trois variables x, y, z, on a aussi

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz,$$

d'où

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz};$$

donc les composantes de l'attraction s'expriment très simplement au moyen des dérivées partielles de la fonction V du travail à laquelle on a donné le nom de *potentiel*, et le tout se réduit à déterminer cette fonction.

La fonction V de x, y, z, égalée à une constante arbitraire C, ou l'équation

$$V = C,$$

représente une famille de surfaces, dites *surfaces de niveau*, jouissant de cette propriété que l'attraction exercée par M′ sur chacun des points de cette surface est dirigée suivant la normale correspondante de cette surface; et, en effet, le travail élémentaire dV est nul pour tous les déplacements qu'on peut concevoir sur la surface.

Dans le cas de la gravité, on a

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$$

et, par suite,

$$V = mS\frac{m'}{r}.$$

Si x', y', z' sont les coordonnées de m', il vient

$$\frac{1}{r} = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$X = \frac{dV}{dx} = -mS\frac{m'(x-x')}{r^3},$$

$$Y = \frac{dV}{dy} = -mS\frac{m'(y-y')}{r^3},$$

$$Z = \frac{dV}{dz} = -mS\frac{m'(z-z')}{r^3},$$

expression qu'on aurait pu écrire *a priori*, en remarquant que la composante suivant l'axe Ox de l'attraction de m' sur m, par exemple, est égale à $\frac{mm'}{r^2}$ multipliée par le cosinus $\frac{x'-x}{r}$ de l'angle que fait la direction de cette force avec l'axe dont il s'agit.

Admettons maintenant que m fasse partie d'un système matériel M, dont nous représenterons les masses des autres éléments par m_1, m_2, ..., et soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... les coordonnées de ces molécules. Désignons par U la somme des fonctions telles que V, étendue à toutes les molécules de M; U est égal à la somme des produits deux à deux des masses des molécules de l'un et l'autre système par l'inverse de leurs distances. La somme des composantes suivant Ox des attractions exercées par M′ sur les molécules de M sera donnée par

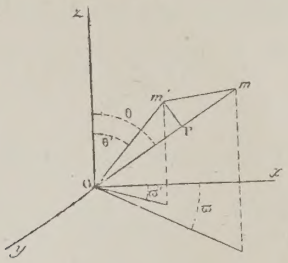
$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dx_1} + \frac{dU}{dx_2} + \ldots,$$

attendu que, V, par exemple, étant la seule partie de U qui renferme x, la composante de l'attraction de m' sur m est $\frac{dV}{dx}$ ou $\frac{dU}{dx}$. On voit ainsi que les composantes de l'attraction entre les deux systèmes s'expriment encore facilement au moyen des dérivées partielles du potentiel total U.

55. Attraction d'un système matériel sur un point matériel qui en est très éloigné par rapport aux propres dimensions du système. — Supposons qu'on prenne pour origine des coordonnées le

centre de gravité O du système M′ et pour axes coordonnés les trois axes d'inertie principaux de ce système, et soient (*fig.* 5)

Fig. 5.



a la distance Om de l'origine O au point attiré;
a', a'_1, a'_2, ... les distances Om', Om'_1, Om'_2, ... de cette origine aux différents éléments matériels m', m'_1, m'_2, ... de M′;
α, β, γ les angles formés par Om avec les axes Ox, Oy, Oz;
A, B, C les moments d'inertie de M′ par rapport à ces axes;
m'P la perpendiculaire abaissée du point m' sur Om;
r, r_1, r_2, ... les distances mm', mm'_1, mm'_2, ...;
(x', y', z'), (x'_1, y'_1, z'_1), ... les coordonnées des points m', m'_1, ...;

on a

$$\mathrm{S}m' = \mathrm{M}',$$

et, d'après la définition même du centre de gravité,

$$\mathrm{S}m'x' = 0, \quad \mathrm{S}my' = 0, \quad \mathrm{S}m'z' = 0, \quad \mathrm{S}m'\mathrm{OP} = 0;$$

puis, en exprimant que Ox, Oy, Oz sont trois axes principaux d'inertie,

$$\mathrm{S}m'x'y' = 0, \quad \mathrm{S}m'x'z' = 0, \quad \mathrm{S}m'y'z' = 0;$$

on voit de plus que

$$\mathrm{OP} = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma,$$
$$r = \sqrt{a^2 + a'^2 - 2a'\,\mathrm{OP}}.$$

En s'arrêtant aux termes du second ordre en $\frac{a'}{a}$, $\frac{\mathrm{OP}'}{a}$, on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{a'^2}{a^2} - 2\frac{\mathrm{OP}}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a'^2}{a^2} - 2\frac{\mathrm{OP}}{a}\right) + \frac{3}{2}\frac{\overline{\mathrm{OP}}^2}{a^2}\right];$$

par suite, eu égard à ce qui précède,

$$V = mS\frac{m'}{r} = \frac{mM'}{a} + \frac{m}{2a^3}S\,m'\left(3\overline{OP}^2 - a'^2\right);$$

or on a

$$A = S\,m'y'^2 + S\,m'z'^2,$$

$$B = S\,m'z'^2 + S\,m'x'^2,$$

$$C = S\,m'x'^2 + S\,m'y'^2,$$

$$S\,m'x'^2 = \frac{B + C - A}{2},$$

$$S\,m'y'^2 = \frac{C + A - B}{2},$$

$$S\,m'z'^2 = \frac{A + B - C}{2},$$

$$S\,m'a'^2 = S\,m'(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{A + B + C}{2},$$

$$S\,m'\overline{OP}^2 = \cos^2\alpha\,S\,m'x'^2 + \cos^2\beta S\,m'y'^2 + \cos^2\gamma S\,m'z'^2,$$

et enfin

$$(1)\quad V = \frac{mM'}{a} + \frac{1}{2}\frac{m}{a^3}[\cos^2\alpha(B + C - 2A) + \cos^2\beta(C + A - 2B) + \cos^2\gamma(A + B - 2C)].$$

Si l'on néglige le second terme de cette expression ou le carré du rapport des dimensions de M′ à la distance a supposée beaucoup plus grande, il vient

$$V = \frac{mM'}{a},$$

expression qui est la même que si le corps M′ était remplacé par un point matériel de même masse placé à son centre de gravité. Donc :

L'attraction d'un système matériel sur un point qui en est fort éloigné est à peu près la même que si toute la masse de ce système était concentrée en son centre de gravité.

En supposant que m fasse partie d'un système matériel M fort éloigné de M′, l'attraction exercée par le second de ces systèmes sur le premier, égale et contraire à celle de M sur la masse M′ censée concentrée en O, sera par conséquent la même que si ces deux masses se trou-

vaient concentrées en leurs centres de gravité respectifs, et l'on a ce théorème, indépendant de la loi de l'attraction, comme il est facile de s'en assurer :

Les centres de gravité de deux systèmes matériels fort éloignés l'un de l'autre s'attirent comme si les masses de ces systèmes s'y trouvaient respectivement concentrées.

Le système d'une planète agit donc à très peu près, sur les autres corps du système solaire, comme si les masses de la planète et de ses satellites étaient concentrées à leur centre de gravité, et ce centre est attiré de la même manière par les différents corps du système solaire.

Chaque corps céleste étant un assemblage de molécules douées d'un pouvoir attractif, et ses dimensions étant très petites relativement à sa distance aux autres corps du système du monde, son centre de gravité est à peu près attiré comme si toute la masse y était réunie, et il agit de la même manière sur ces différents corps. C'est ainsi qu'il nous a été permis, dans la recherche du mouvement du centre de gravité d'un corps céleste, de considérer ce dernier comme un simple point matériel ayant la masse du corps, hypothèse que rend plus exacte encore la presque sphéricité des planètes et de leurs satellites, comme nous le verrons plus loin, et qui, admise *a priori* sous la réserve d'une justification ultérieure, a conduit Newton au principe de la gravitation.

Revenons à l'attraction d'un système matériel sur un point qui en est éloigné; si l'on veut pousser plus loin l'approximation et tenir compte des termes du second ordre, il suffira de considérer le second terme de V ou de poser simplement

$$V = \frac{1}{2}\frac{m}{a^2}[\cos^2\alpha(B + C - 2A) + \cos^2\beta(C + A - 2B) + \cos^2\gamma(A + B - 2C)],$$

en convenant d'ajouter, quand il sera utile de le faire, aux composantes parallèles aux axes déduites de cette expression, celles qui proviennent de l'attraction sur le point m de la masse M′ concentrée au point O.

Pour obtenir $X = \frac{dV}{dx}$, nous ferons dans V

$$\cos\beta = \frac{y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{a}, \quad \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 1 - \frac{y^2 + z^2}{a^2},$$

et nous aurons

$$V = \frac{m}{2}\left[\frac{B + C - 2A}{a^3} + 3\,\frac{y^2(A - B) + z^2(A - C)}{a^5}\right].$$

En différentiant par rapport à x et remarquant que

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{da}{dx} = \frac{x}{a},$$

on trouve

$$X = -\frac{3}{2}\,\frac{mx}{a^5}\left\{B + C - 2A + \frac{5}{a^2}[y^2(A - B) + z^2(A - C)]\right\},$$

et l'on a de même

$$(2)\quad \begin{cases} Y = -\dfrac{3}{2}\,\dfrac{my}{a^5}\left\{C + A - 2B + \dfrac{5}{a^2}[x^2(B - A) + z^2(B - C)]\right\}, \\ Z = -\dfrac{3}{2}\,\dfrac{mz}{a^5}\left\{A + B - 2C + \dfrac{5}{a^2}[x^2(C - A) + y^2(C - B)]\right\}. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous aurons moins besoin de ces formules que de celles qui donnent les valeurs des moments, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz de l'attraction de m sur M′, attraction dont les composantes sont égales et de signes contraires à celles que fournissent les mêmes formules. Le sens positif des moments étant censé avoir lieu de la droite vers la gauche, si nous désignons par $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ les projections de l'axe $\mathfrak{M}$ du moment par rapport au point O de l'attraction dont il s'agit, et si nous faisons abstraction de la résultante $\frac{m\mathrm{M}'}{a^2}$ dirigée de m vers O qui ne donne aucun terme, nous avons

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_x = Zy - Yz = \dfrac{3m}{a^5}(B - C)zy, \\ \text{et de même} \\ \mathfrak{M}_y = \dfrac{3m}{a^5}(C - A)xz, \\ \mathfrak{M}_z = \dfrac{3m}{a^5}(A - B)yz. \end{cases}$$

Ces formules nous seront fort utiles lorsque nous nous occuperons du mouvement d'un corps céleste autour de son centre de gravité.

§ II. — Attraction des corps terminés par des surfaces sphériques.

56. Considérations générales sur la constitution des corps célestes. — Les corps célestes ont une forme à peu près sphérique, et, d'après ce que nous connaissons sur la constitution physique et l'origine ignée de notre globe, nous sommes conduit à croire que, à une certaine époque, ils se trouvaient à l'état fluide, sous toute réserve de ceux qui pourraient encore l'être. Ainsi, avant la formation de la première couche solide, ils ont dû affecter la forme d'équilibre d'une masse fluide soumise à ses actions mutuelles et animée d'un mouvement uniforme autour d'un axe, forme que le retrait, dû au refroidissement, n'a pu modifier d'une manière notable; et il y a tout lieu de présumer que, dans de pareilles conditions, les matières de même densité se sont distribuées symétriquement autour de l'axe de rotation.

La force centrifuge, développée par le mouvement de rotation, a dû modifier la forme sphérique que la masse fluide aurait naturellement prise si cette rotation n'avait pas existé; mais comme, d'après l'observation, les mouvements de cette nature sont généralement très lents, les déformations qu'ils ont produites sont très faibles; nous pourrons donc, dans une première approximation, en faire abstraction et admettre que chaque corps céleste est composé de couches sphériques concentriques et homogènes dont la densité varie avec la distance au centre.

Nous sommes ainsi conduit en premier lieu à calculer l'attraction d'une couche sphérique homogène sur un point matériel.

57. Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur. — Quelle que soit l'épaisseur de la couche, on peut la supposer décomposée en couches extrêmement minces, et il suffira de considérer chacune d'elles en particulier, puis de faire la somme de leurs attractions, qui évidemment sont dirigées du point attiré m (*fig.* 6) vers leur centre commun, pour avoir l'attraction de la couche totale.

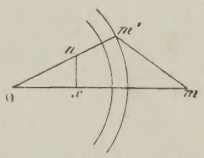
Soient

a' le rayon d'une couche infiniment mince;
e son épaisseur;
ρ sa densité;
a la distance de son centre au point attiré m.

Nous conviendrons, une fois pour toutes, d'appeler *ouverture* d'un cône la portion de la surface qu'il détermine sur la sphère d'un rayon égal à l'unité et dont le sommet du cône est le centre.

Cela posé, concevons un cône ayant pour sommet le centre O d'une ouverture infiniment petite $d\omega$, aboutissant à un point m' de la surface extérieure de la couche; ce cône déterminera dans la couche un élé-

Fig. 6.



ment de volume dont la masse sera $\rho a'^2 e\, d\omega$. Cette masse donnant lieu à l'attraction $m\frac{\rho a'^2 e\, d\omega}{mm'^2}$, on a, pour le potentiel,

$$V = \rho m a'^2 e \int \frac{d\omega}{mm'},$$

l'intégrale se rapportant à la surface entière 4π de la sphère ayant l'unité pour rayon.

Quant à la masse de la couche sphérique, elle a pour expression

$$M' = \rho\, 4\pi a'^2 e.$$

Soient p le cosinus de l'angle $m'Om$, angle qui doit varier de zéro à π, et q l'angle formé par le plan mOm' avec un plan fixe (P) passant par O. Portons sur Om', à partir du point O, une longueur On égale à l'unité, projetée en Os sur Om. Si le plan mOm' tourne de l'angle dq autour de Om, l'arc décrit par n est

$$dq \times \overline{ns} = dq \sin \widehat{nOs},$$

et si, dans les deux positions de n, on fait varier l'angle $\widehat{nOm}$ d'une quantité infiniment petite, on déterminera un élément sphérique mesuré par

$$dq \sin\widehat{nOs} \times d\widehat{nOs} = -dq\,dp,$$

et que l'on peut prendre pour $d\omega$. D'autre part, on a, dans le triangle $Om'm$,

$$mm' = \sqrt{a^2 - 2aa'p + a'^2};$$

il vient donc, après avoir effectué le calcul,

$$(a) \qquad V = \rho m a'^2 e \int_{+1}^{-1} dp \int_0^{2\pi} \frac{dq}{\sqrt{a^2 - 2aa'p + a'^2}} = \frac{m\mathrm{M}'}{a}.$$

Il résulte de là que le point m est attiré par la couche comme si la masse de cette dernière était concentrée en son centre; de là on déduit immédiatement ce théorème :

58. *Une sphère pleine ou creuse, homogène ou composée de couches concentriques homogènes dont la densité peut varier avec le rayon suivant une loi quelconque, exerce, sur un point extérieur, la même attraction que si toute sa masse était concentrée en son centre.*

On déduit de là, comme conséquence, en faisant le même raisonnement qu'au n° 55 :

Deux sphères composées de couches concentriques homogènes s'attirent comme si leurs masses étaient concentrées en leurs centres de gravité respectifs.

59. **Attraction d'une couche sphérique homogène ou plus, généralement, limitée entre deux surfaces ellipsoïdales homothétiques sur un point intérieur.** — Concevons un cône d'une ouverture infiniment petite $d\omega$, ayant pour sommet le point attiré m; il déterminera dans la couche, censée elliptique, deux segments exerçant sur m deux actions directement opposées. Soit r la distance de m à un point quelconque de l'un de ces segments; on pourra décomposer ce dernier en éléments de volume, tels que $r^2\,d\omega\,dr$, dont la masse donnera lieu,

sur m, à l'attraction

$$m\rho r^2 \frac{d\omega\, dr}{r^2} = m\rho\, d\omega\, dr.$$

En intégrant par rapport à r et appelant u l'épaisseur du segment dans le sens de r, on trouve $m\rho u\, d\omega$ pour l'attraction qu'il exerce sur m; et comme, d'après une propriété connue, u a la même valeur pour les deux segments, on voit que leurs actions sur m se détruisent. Donc :

Une couche homogène sphérique ou limitée par deux ellipsoïdes homothétiques n'exerce aucune attraction sur un point, par suite sur un système matériel, placé dans son intérieur.

L'attraction d'une sphère composée de couches homogènes concentriques sur un point de sa masse se réduit donc à celle des couches intérieures à la surface sphérique passant par ce point.

60. **Application à la pesanteur.** — Comme on l'a fait remarquer plus haut, le poids absolu d'un corps à la surface de la Terre n'est autre chose que la résultante des actions attractives qu'elle exerce sur les différents éléments matériels de ce corps; mais le poids apparent, tel qu'on l'observe, est la résultante de cette première résultante et de la force centrifuge due à la rotation de notre planète autour de son axe. Si, dans une première approximation, on néglige la force centrifuge ainsi que l'aplatissement de la Terre aux pôles, éléments dont on tiendra compte ultérieurement, on peut déduire des théorèmes qui précèdent l'expression de l'accélération g de la pesanteur terrestre; on a en effet, en désignant respectivement par a' et ρ le rayon moyen et la densité moyenne de la Terre,

$$M' = \tfrac{4}{3}\pi\rho a'^2, \quad g = \frac{M'}{a'^2} = \tfrac{4}{3}\pi\rho a'.$$

D'après le numéro précédent, la formule qui donne g est également applicable à un point intérieur de la Terre situé à la distance a' de son centre de gravité. On voit ainsi que, dans l'intérieur de la Terre, l'accélération de la pesanteur croît comme la distance au centre.

61. Le Soleil, les planètes et les satellites, d'après ce que nous avons dit au n° 56, pouvant être considérés à peu près comme formés de couches sphériques homogènes, doivent attirer les corps extérieurs, ou du moins sensiblement, comme si leurs masses se trouvaient condensées en leurs centres. L'erreur commise est du même ordre de grandeur que la différence entre la surface de l'astre considéré et celle de la sphère; pour un point attiré voisin de cette surface et pour un point très éloigné, elle est du même ordre de grandeur que le produit de la différence ci-dessus par le carré du rapport du rayon du corps attirant au point attiré; car on a vu au n° 55 que l'éloignement d'un corps attiré rend l'erreur résultant de la seconde des suppositions précédentes du même ordre que le carré de ce rapport. Les corps célestes s'attirent donc très sensiblement comme si leur masse était concentrée en leur centre, non seulement parce qu'ils sont fort éloignés relativement à leurs propres dimensions, mais encore parce que leur figure diffère peu de celle de la sphère.

62. Recherche des lois de l'attraction suivant lesquelles les sphères s'attirent comme si leurs masses étaient concentrées en leur centre. — La propriété des sphères composées de couches sphériques homogènes d'attirer un point extérieur, comme si leur masse était concentrée en leur centre de gravité, est digne de remarque, et il n'est pas sans intérêt de rechercher s'il n'existe pas de lois autres que celles de la gravitation qui y conduisent.

Cette propriété, ayant lieu, par hypothèse, pour une sphère et la sphère que l'on obtiendrait en enlevant à la précédente une couche sphérique superficielle infiniment mince, subsiste nécessairement pour cette couche. Il suffit donc de déterminer les lois de l'attraction pour lesquelles une couche sphérique infiniment mince attire un point extérieur comme si toute sa masse était condensée en son centre.

Désignons par $\varphi(r)$ la loi de l'attraction et posons

$$F(r) = -f\varphi(r)\,dr,$$

en nous reportant au n° 57, dont nous conserverons les notations.

Nous voyons immédiatement que le potentiel relatif à cette loi s'obtiendra en remplaçant, dans l'intégrale de la formule (a) du même nu-

méro,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'p + a'^2}} = \frac{1}{r} = -\int \frac{dr}{r^2}$$

par $F(r)$; nous aurons ainsi, après avoir effectué l'intégration par rapport à q, et en remarquant que $M' = 4\pi a'^2 e\rho$,

$$V = \frac{M'm}{2} \int_1^{-1} F(r)\, dp. \tag{1}$$

Or il faut, d'après l'hypothèse admise, que V soit de la forme

$$V = M'm[F(a) + U],$$

U étant une constante indépendante de a, mais pouvant renfermer a'. On a donc

$$\int_1^{-1} F(r)\, dp = 2F(a) + 2U.$$

Mais de la relation

$$r^2 = a^2 - 2aa'p + a'^2$$

on tire

$$dp = -\frac{r\, dr}{aa'};$$

il vient donc, en substituant à p la variable r,

$$\int_{a-a}^{a+a} r F(r)\, dr = 2aa' F(a) + 2aa' U$$

ou

$$\psi(a + a') - \psi(a - a') = 2aa' F(a) + 2aa' U,$$

en posant

$$\int r F(r)\, dr = \psi(r).$$

Si l'on différentie deux fois l'équation ci-dessus par rapport à a, puis par rapport à a', on a

$$\psi''(a + a') - \psi''(a - a') = 2a'[a F''(a) + 2F'(a)] = -2a'[a\varphi'(a) + 2\varphi(a)],$$

$$\psi''(a + a') - \psi''(a - a') = 2a\left(a' \frac{d^2 U}{da'^2} + 2\frac{dU}{da'}\right);$$

d'où, en faisant la différence,

$$\varphi'(a) + \frac{2}{a}\varphi(a) = -\left(\frac{d^2 U}{da'^2} + \frac{2}{a'}\frac{dU}{da'}\right).$$

Or le premier membre de cette équation est uniquement fonction de a et le second de a', ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que chacun d'eux est égal à une constante A. Il vient donc, en changeant a en r,

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} + \frac{2}{r}\varphi(r) = A$$

d'où (1)

$$\varphi(r) = \frac{Ar}{3} + \frac{B}{r^2},$$

B étant une constante arbitraire; telle est la loi cherchée. Si A = 0, on retombe sur la loi de la nature, et l'on voit que c'est la seule qui, rendant l'attraction très petite à de grandes distances, donne aux sphères la propriété de s'attirer, comme si leurs masses étaient concentrées en leurs centres respectifs.

On démontrerait, par une analyse semblable à la précédente, que la loi naturelle est aussi la seule pour laquelle un corps placé dans l'intérieur d'une couche sphérique homogène est également attiré de toute part; mais nous ne nous arrêterons pas à ce calcul, qui ne présente aucune difficulté.

§ III. — Attraction des ellipsoïdes homogènes.

63. Les recherches analytiques, relatives à la forme des corps célestes, s'appuient essentiellement sur la considération des ellipsoïdes,

---

(1) En faisant abstraction de A, on a

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{2\,dr}{r};$$

d'où, en appelant U une constante,

$$\varphi = \frac{U}{r^2}.$$

Substituant cette expression dans l'équation du texte, en considérant maintenant U comme une fonction de r, on trouve

$$\frac{1}{r^2}\frac{dU}{dr} = A;$$

d'où

$$U = \frac{Ar^3}{3} + B$$

$$\varphi = \frac{Ar}{3} + \frac{B}{r^2}.$$

et nous allons, en conséquence, chercher à déterminer l'attraction exercée par un ellipsoïde homogène sur un point extérieur; c'est d'ailleurs le seul cas que nous ayons à examiner, puisque, d'après le n° 59, l'attraction d'un pareil corps sur un point de sa masse se ramène à celle d'un ellipsoïde semblable passant par ce point.

64. Digression sur quelques propriétés des ellipsoïdes homofocaux. — On appelle *points correspondants* sur les surfaces de deux ellipsoïdes ceux dont les coordonnées sont proportionnelles aux axes qui sont parallèles à ces coordonnées.

Les points correspondants de deux ellipsoïdes homofocaux jouissent des propriétés suivantes :

1° *La différence des carrés des distances du centre à deux points correspondants de deux ellipsoïdes homofocaux est constante.*

Soient

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1,$$

$$\frac{x'^2}{\alpha'^2}+\frac{y'^2}{\beta'^2}+\frac{z'^2}{\gamma'^2}=1$$

les équations des deux ellipsoïdes, dans lesquelles les coordonnées sont censées être respectivement celles de deux points correspondants. Nous admettrons, pour fixer les idées, que l'on a $\alpha>\beta>\gamma$, par suite $\alpha'>\beta'>\gamma'$; on a, par hypothèse,

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{x'}{\alpha'},\quad \frac{y}{\beta}=\frac{y'}{\beta'},\quad \frac{z}{\gamma}=\frac{z'}{\gamma'},$$

$$\alpha^2-\alpha'^2=\beta^2-\beta'^2=\gamma^2-\gamma'^2;$$

d'où

$$x^2+y^2+z^2-(x'^2+y'^2+z'^2)$$
$$=\frac{x^2}{\alpha^2}(\alpha^2-\alpha'^2)+\frac{y^2}{\beta^2}(\beta^2-\beta'^2)+\frac{z^2}{\gamma^2}(\gamma^2-\gamma'^2)=\alpha^2-\alpha'^2,$$

ce qu'il fallait établir.

2° *Le produit de deux rayons vecteurs quelconques, se rapportant respectivement aux deux ellipsoïdes, par le cosinus de leur angle est égal au produit semblable relatif aux points correspondants.*

Soient R, R_1 les deux rayons vecteurs aboutissant aux points (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) des deux ellipsoïdes, et accentuons ces lettres pour représenter les quantités ci-dessus qui se rapportent aux points qui correspondent aux précédentes; nous avons

$$RR_1 \cos(\widehat{R, R_1}) = xx_1 + yy_1 + zz_1 = \frac{\alpha}{\alpha'} x' \frac{\alpha'}{\alpha} x'_1 + \frac{\beta}{\beta'} y' \frac{\beta'}{\beta} y'_1 + \frac{\gamma}{\gamma'} z' \frac{\gamma'}{\gamma} z'_1$$

$$= x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1 = R'R'_1 \cos(\widehat{R', R'_1}).$$

3° *La distance de deux points appartenant respectivement à deux ellipsoïdes homofocaux est égale à celle de leurs correspondants.*

En effet, d'après le premier théorème, on a

$$R^2 - R'^2 = R_1'^2 - R_1^2,$$

d'où

$$R^2 + R_1^2 = R'^2 + R_1'^2$$

et, par suite, en vertu du second,

$$R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \cos(\widehat{R, R_1}) = R'^2 + R_1'^2 - 2R'R'_1 \cos(\widehat{R', R'_1}).$$

Remarque. — Concevons une couche infiniment mince terminée par deux ellipsoïdes semblables et une seconde couche ellipsoïdale dont les surfaces soient respectivement homofocales de celles de la première; on reconnaîtra sans peine que ces deux dernières surfaces sont semblables entre elles et que le rapport de similitude est le même pour les deux couches. Si l'on considère, dans la première couche, une surface ellipsoïdale semblable à celles qui la terminent, il existera, dans l'intérieur de la seconde, une surface homofocale avec elle et semblable à celles qui limitent cette seconde couche. On conçoit dès lors ce que l'on doit entendre en disant que tout point pris dans l'une des couches a son correspondant dans l'autre.

4° *Les portions de volume de deux couches homofocales infiniment minces à surfaces respectivement semblables, limitées par des contours dont les points sont correspondants, sont entre elles comme les volumes de ces couches.*

Car, en décomposant les portions des deux volumes en parallélé-

pipèdes élémentaires dont les sommets soient des points correspondants, le rapport de deux parallélépipèdes correspondants est exprimé par

$$\frac{dx\,dy\,dz}{dx'\,dy'\,dz'} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

65. *Le problème de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur se ramène au cas où le point est situé sur la surface extérieure d'une couche infiniment mince, terminée par deux ellipsoïdes semblables.*

Comme on peut supposer l'ellipsoïde décomposé en couches infiniment minces, terminées par des surfaces semblables à celle qui limite le corps, il suffit de chercher à quoi se réduit l'attraction de l'une de ces couches sur le point attiré.

Concevons que l'on fasse passer par le point attiré m un ellipsoïde limitant extérieurement une couche homofocale de la proposée et ayant la même densité. Soient

m' le point correspondant de m sur la couche proposée;
dv', dv deux éléments de volume correspondants pris respectivement dans cette couche et dans son homofocale;
r la distance de m à dv' égale à celle de m' à dv;

on a

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}$$

et, pour le potentiel relatif au point m et à la couche proposée, en laissant de côté le facteur m,

$$V' = \rho\int\frac{dv'}{r} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}\,\rho\int\frac{dv}{r} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}\,\rho V,$$

en désignant par V' le potentiel relatif au point m' et à la couche passant par le point m. Or, si le point m' se déplace sur la couche proposée, m se déplace sur son homofocale; mais V' reste constant, puisque m' est en équilibre (59) sous l'action de la couche passant par le point m. Donc, lorsque m se déplace sur la couche homofocale de la proposée, V reste constant ou, enfin, *l'attraction de la couche proposée est normale à son homofocale passant par le point attiré.*

Pour une couche intermédiaire entre celles que nous venons de considérer et dont α'', β'', γ'' représenteraient les demi-axes, V'' le potentiel correspondant du point m, on aurait de même

$$\frac{V''}{V} = \frac{\alpha''\beta''\gamma''}{\alpha\beta\gamma};$$

par suite,

$$\frac{V}{\alpha\beta\gamma} = \frac{V'}{\alpha'\beta'\gamma'} = \frac{V''}{\alpha''\beta''\gamma''}.$$

Soient

$$X' = \frac{dV'}{dx}, \quad X'' = \frac{dV''}{dx}$$

les composantes parallèles à Ox de l'attraction de la couche proposée et de la couche intermédiaire sur le point m, dont les coordonnées sont x, y, z; on tire, de l'équation précédente,

$$\frac{X'}{X''} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha''\beta''\gamma''},$$

et, comme cette proportion doit avoir lieu, quelle que soit la position de la couche intermédiaire et, par suite, lorsqu'elle se confond avec celle qui passe par le point m, il vient, en désignant par X l'attraction exercée par cette dernière estimée suivant Ox,

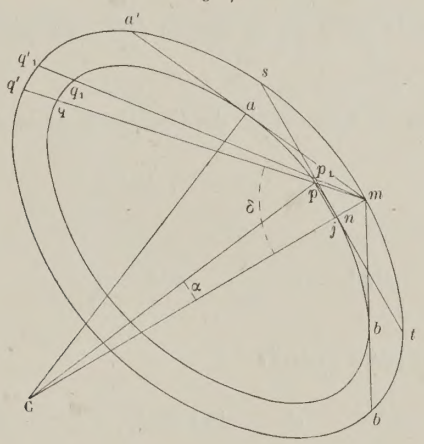
$$\frac{X'}{X} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}.$$

Le tout revient donc à calculer X, Y, Z, ou l'attraction exercée par une couche ellipsoïdale infiniment mince, limitée par des surfaces semblables sur un point de sa surface extérieure; mais, avant d'aller plus loin, nous devrons faire remarquer que les différentes propriétés que nous venons d'établir sont indépendantes de la fonction de la distance qui entre dans l'expression de l'attraction.

66. Attraction d'une couche homogène infiniment mince, de forme quelconque sur un point de sa surface. — 1° *Le point se trouve sur la surface extérieure.* — Soient (*fig.* 7) $mn = e$ l'épaisseur de la couche en m ou la normale abaissée de ce point sur la surface intérieure.

Nous supposerons que la figure résulte d'une section faite dans la couche par un plan passant par mn; soient ma', mb' les génératrices, comprises dans le plan, du cône ayant m pour sommet et circonscrit à la surface intérieure; ces génératrices touchent cette surface en a et b et rencontrent la surface extérieure en a' et b'. Soient de plus s et t les intersections de la tangente en m avec le profil de la surface extérieure. L'attraction cherchée sera la résultante des attractions dues aux segments $ambn$, (msa', mtb'), $a'abb'$.

Fig. 7.



Considérons en premier lieu le segment $ambn$ et concevons dans l'intérieur du cône $a'mb'$ un cône ayant le même sommet et une ouverture infiniment petite mesurée par l'élément sphérique $d\omega$. Nous pouvons admettre que le plan de la figure passe par l'axe de ce cône élémentaire. Soient

mq', mq'_1 celles de ses génératrices qui sont comprises dans ce plan;
p, q et p_1, q_1 leurs points de rencontre avec la surface intérieure;
q', q'_1 leurs intersections avec la surface extérieure;
pj la perpendiculaire abaissée de p sur la direction de mn.

En suivant la même marche qu'au n° 59, on trouvera que l'attraction de l'élément pmp_1 sur le point m, abstraction faite du facteur m, est $\rho d\omega \overline{mp}$, et sa composante suivant mn sera $\rho d\omega \overline{mj}$. L'épaisseur $mn = e$ étant un infiniment petit du premier ordre par rapport à ma,

mb, limites de *mp*, il suffira de conserver les secondes puissances de *ma*, *mb*, *mp*, *pj*, puisque ces puissances sont de l'ordre *e*. Il nous sera donc permis de remplacer l'arc *an* par celui de son cercle osculateur en *n*. Soient

C le centre de ce cercle;

$R = \overline{pC} = \overline{aC} = \overline{nC}$ son rayon;

δ l'angle $\widehat{pmC}$;

α l'angle $\widehat{pCn}$, dont nous négligerons le carré;

q l'angle formé par le plan de la figure avec un plan fixe passant par *mn*.

La limite supérieure $\delta_1 = \widehat{amC}$ de l'angle δ sera donnée par

$$R = (R + e)\sin\delta_1,$$

d'où

$$(\alpha) \qquad \sin\delta_1 = 1 - \frac{e}{R}, \quad \cos\delta_1 = \sqrt{\frac{2e}{R}}.$$

Comme nous pouvons prendre

$$d\omega = \sin\delta\, d\delta\, dq,$$

nous avons, pour la composante suivant *mn* de l'attraction sur *m* de l'élément pmp_1,

$$\rho\, dq\, \overline{mj}\, \sin\delta\, d\delta.$$

Si nous posons

$$\overline{mj}\, \sin\delta\, d\delta = dF,$$

F étant une fonction de δ qu'il s'agit de déterminer, l'attraction du segment *ambn* sur *m*, estimée suivant *mn*, sera

$$(\beta) \qquad \int_0^{2\pi} [F(\delta_1) - F(0)]\, dq.$$

La figure donne

$$\overline{mj} = R + e - R\cos\alpha = e + \frac{R\alpha^2}{2}, \quad \overline{mj} = mp\cos\delta = R\frac{\sin\alpha}{\sin\delta}\cos\delta = R\alpha\cot\delta,$$

et, en vertu de la seconde de ces valeurs, il vient

$$dF = R\alpha\cos\delta\, d\delta.$$

Si l'on égale entre elles les deux expressions ci-dessus de $\overline{mj}$, on trouve

$$R^2\alpha^2 - 2R^2\alpha\cot\delta + 2Re = 0,$$

d'où

$$R\alpha = \frac{R - \sqrt{R^2 - 2Re\tang^2\delta}}{\tang\delta},$$

en prenant la racine qui s'annule avec δ. Nous avons, par suite,

$$(\gamma) \qquad dF = R\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2e}{R}\tang^2\delta}\right)\frac{\cos^2\delta}{\sin\delta}\,d\delta$$

ou, en posant $z = \cos\delta$,

$$(\gamma') \quad dF = -R\left[z - \sqrt{\left(1 + \frac{2e}{R}\right)z^2 - \frac{2e}{R}}\right]\frac{z\,dz}{1 - z^2} = -R\left[z - \left(1 + \frac{e}{R}\right)\sqrt{z^2 - \frac{2e}{R}}\right]\frac{z\,dz}{1 - z^2}.$$

On déduit de là

$$(\delta) \quad F = R\left[z - \left(1 + \frac{e}{R}\right)\sqrt{z^2 - \frac{2e}{R}} - \tfrac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}\,\frac{\sqrt{1 - \frac{2e}{R}} - \sqrt{z^2 - \frac{2e}{R}}}{\sqrt{1 - \frac{2e}{R}} + \sqrt{z^2 - \frac{2e}{R}}}\right] + \text{const.}\ (1).$$

Comme, pour $\delta = 0$ et $\delta = \delta_1$, on a respectivement $z = 1$ et $z = \sqrt{\frac{2e}{R}}$,

---

(1) On a, en effet,

$$\int\frac{z^2\,dz}{1 - z^2} = -z + \int\frac{dz}{1 - z^2} = -z + \tfrac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

Posant $z^2 - \frac{2e}{R} = u^2$, il vient, en continuant à négliger le carré de $\frac{e^2}{R^2}$,

$$\int\sqrt{z^2 - \frac{2e}{R}}\,\frac{z\,dz}{1 - z^2} = \int\frac{u^2\,du}{1 - \frac{2e}{R} - u^2} = -u + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e}{R}\right)\log\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{2e}{R}} + u}{\sqrt{1 - \frac{2e}{R}} + u}\right),$$

d'où l'on déduit l'intégrale donnée dans le texte en remplaçant u par sa valeur en fonction de z.

il vient, au degré d'approximation convenu,

$$F(\delta_1) - F(o) = e$$

et, pour la composante normale (β) de l'attraction,

$$(\beta') \qquad 2\pi\rho e.$$

L'attraction du cône pmp_1 sur m donne, suivant la perpendiculaire à mn, la composante

$$\rho\, dq\, dF \tang\delta$$

ou, en ayant égard à la valeur (γ),

$$\rho\, dq \left[\cos\delta - \left(1 + \frac{e}{R}\right)\sqrt{\cos^2\delta - \frac{2e}{R}\sin^2\delta}\right] d\delta;$$

d'où, pour la résultante relative au secteur de amn déterminé par deux plans passant par mn et faisant entre eux l'angle dq,

$$\rho\, dq \left[\sin\delta_1 - \left(1 + \frac{e}{R}\right)\int_0^{\delta_1}\sqrt{\cos^2\delta - \frac{2e}{R}\sin^2\delta}\, d\delta\right].$$

Pour le secteur correspondant de nmb, on a une composante égale à la précédente, mais de sens contraire; il suit de là que le segment $ambn$ n'exerce sur m qu'une attraction normale à la couche.

Considérons maintenant le segment (msa', mtb') et concevons momentanément que les points p, p_1 se trouvent sur l'arc ma'; l'attraction du cône pmp_1 sur le point m, estimée suivant mn, ou $\rho\,\overline{mj}\, dq \sin\delta\, d\delta$, est de l'ordre mj, c'est-à-dire du second ordre, et est par suite négligeable. On démontrerait d'ailleurs, comme ci-dessus, que les composantes élémentaires de l'attraction perpendiculaires à mn se détruisent deux à deux. Il n'y a donc pas lieu de tenir compte du segment en question.

La composante normale de l'attraction exercée par le segment $a'abb'$ sur le point m a évidemment pour expression

$$\rho\int_0^{2\pi} dq \int_0^{\delta_1} \overline{qq'}\cos\delta\sin\delta\, d\delta.$$

Si nous posons

$$\overline{qq'}\cos\delta\sin\delta = f(\delta, q)$$

et si nous nous rappelons que

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2e}{R}},$$

nous avons, pour la composante cherchée,

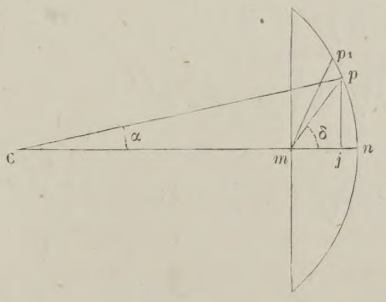
$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} \rho\displaystyle\int_0^{2\pi} dq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{2e}{R}}} f(\delta, q)\, d\delta \\ \quad = \rho\displaystyle\int_0^{2\pi} dq \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\delta, q)\, d\delta - f\left(\frac{\pi}{2}, q\right)\sqrt{\frac{2e}{R}}\right] = \rho\int_0^{2\pi} dq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\delta, q), \end{cases}$$

en remarquant que $f(\delta, q)$ est de l'ordre e.

La composante perpendiculaire à mC de l'attraction dont il s'agit ne pourra se déterminer que dans chaque cas particulier.

2° *Le point attiré se trouve sur la surface intérieure.* — Soient (*fig.* 8) n le point de la surface extérieure correspondant au point attiré m et

Fig. 8.



e l'épaisseur mn. Nous conserverons les notations qui précèdent, mais en mesurant les angles δ à partir de mn. Nous aurons toujours, pour la composante normale due à l'attraction du cône élémentaire pmp_1,

$$\overline{mj}\sin\delta\, d\delta\, dq = d\mathrm{F}\, dq,$$

et la composante semblable due à l'attraction du segment déterminé

dans la couche par le plan tangent en m, du côté de n,

$$(\beta'') \qquad \rho\int_0^{2\pi}\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(o)\right]dq.$$

Nous avons

$$mj = R\cos\alpha-(R-e)=e-\frac{R\alpha^2}{2},$$

$$mj = R\frac{\sin\alpha}{\sin\delta}\cos\delta = R\alpha\cot\delta;$$

d'où

$$R^2\alpha^2+2R\alpha\cot\delta-2Re=o,$$

$$R\alpha = R\frac{-1+\sqrt{1+\frac{2e}{R}\tang^2\delta}}{\tang\delta},$$

$$\overline{mj} = R\left(-1+\sqrt{1+\frac{2e}{R}\tang^2\delta}\right)\frac{\cos^2\delta}{\sin^2\delta};$$

puis

$$dF = R\left(-1+\sqrt{1+\frac{2e}{R}\tang^2\delta}\right)\frac{\cos^2\delta}{\sin\delta}\,d\delta.$$

En continuant à poser $z=\cos\delta$, il vient

$$dF = R\left[z-\sqrt{\left(1-\frac{2e}{R}\right)z^2+\frac{2e}{R}}\right]\frac{z\,dz}{1-z^2}$$

$$= R\left[z-\left(1-\frac{e}{R}\right)\sqrt{z^2+\frac{2e}{R}}\right]\frac{z\,dz}{1-z^2},$$

$$F = R\left\{-z+\left(1-\frac{e}{R}\right)\sqrt{z^2+\frac{2e}{R}}+\tfrac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}\,\frac{\sqrt{1+\frac{2e}{R}}-\sqrt{z^2+\frac{2e}{R}}}{\sqrt{1+\frac{2e}{R}}+\sqrt{z^2+\frac{2e}{R}}}\right\},$$

d'où

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(o)=e,$$

et, pour la composante cherchée (β''),

$$2\pi\rho e.$$

On reconnaîtra, comme plus haut, que le segment dont il s'agit ne donne pas de composante perpendiculaire à mn.

Quant à la composante normale de l'attraction de l'autre segment de la couche, elle sera également donnée par la formule (ε).

Si donc on considère un point de la surface extérieure et le point de la surface intérieure situé sur la normale au premier, la différence des composantes suivant cette normale des attractions de la couche sur ces deux points sera

$$4\pi\rho me,$$

en restituant le facteur m, dont nous avions fait abstraction.

67. Attraction d'une couche infiniment mince, terminée par deux surfaces ellipsoïdales homothétiques sur un point de la surface extérieure (*fig.* 7). — Les attractions exercées par les éléments coniques (pmp_1), $(q_1q_1'q'q)$ ont respectivement pour expressions

$$m\rho.\overline{mp}\,d\omega \quad \text{et} \quad m\rho.\overline{qq'}\,d\omega,$$

et, comme $\overline{qq'} = \overline{mp}$, on a pour résultante

$$2m\rho.\overline{mp}\,d\omega,$$

c'est-à-dire le double de l'action exercée par le cône élémentaire pmp_1 sur m. La composante normale de l'attraction exercée par la couche entière sur m a donc pour expression

$$4\pi\rho me. \tag{ζ}$$

Il résulte également de la dernière de ces considérations, eu égard à ce qui précède, que l'attraction est normale à la couche, ce qui est conforme à ce qui a été établi au n° 65.

68. Composantes de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur. — Supposons que la couche dont nous nous sommes occupé au numéro précédent représente l'homofocale, passant par le point attiré m, de l'une des couches à surfaces semblables, dans lesquelles on peut supposer l'ellipsoïde décomposé. Soient

$\overline{OQ} = P'$ la distance du centre O de l'ellipsoïde au plan tangent en m;

i le point d'intersection du rayon Om avec la surface intérieure de la couche passant par m;

$mn = e$ l'épaisseur de la couche en m;

γ', β', α' les demi-axes de cette surface dirigés suivant Ox, Oy, Oz;

γ, β, α les demi-axes correspondants de la couche homofocale de l'ellipsoïde.

Les épaisseurs de ces deux couches, suivant Oz, seront respectivement $d\gamma'$ et $d\gamma$.

Les deux triangles semblables min, OQm donnent

$$e = \frac{\overline{OQ_1}\cdot\overline{mi}}{\overline{Om}} = \frac{P' d\gamma'}{\gamma'};$$

on a d'ailleurs, en désignant par x, y, z les coordonnées de m,

$$P'^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{\alpha'^4} + \frac{y^2}{\beta'^4} + \frac{z^2}{\gamma'^4}},$$

$$\cos(P', z) = -\frac{P'z}{\gamma'^2},$$

$$\cos(P', y) = -\frac{P'y}{\beta'^2},$$

$$\cos(P', x) = -\frac{P'x}{\alpha'^2}.$$

En se reportant au numéro précédent, on voit que les composantes de l'attraction de la couche passant par le point m sur ce point, suivant Oz, Oy, Ox, ont pour valeurs

$$-4\pi\rho m z \frac{P'^2 d\gamma'}{\gamma'^3}, \quad -4\pi\rho m y \frac{P'^2 d\gamma'}{\gamma'\beta'^2}, \quad -4\pi\rho m x \frac{P'^2 d\gamma'}{\gamma'\alpha'^2}.$$

Si on les multiplie par $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}$ (n° 65), on aura les composantes dZ, dY, dX de l'attraction de la couche considérée de l'ellipsoïde sur le point m, et, en remarquant que $\frac{d\gamma'}{\gamma'} = \frac{d\gamma}{\gamma}$, on obtient

$$dZ = -\frac{4\pi\rho m z P'^2 \alpha\beta\, d\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'^3},$$

$$dY = -\frac{4\pi\rho m y P'^2 \alpha\beta\, d\gamma}{\alpha'\beta'^3\gamma'},$$

$$dX = -\frac{4\pi\rho m x P'^2 \alpha\beta\, d\gamma}{\alpha'^3\beta'\gamma'}.$$

Soient c, b, a les demi-axes de la surface de l'ellipsoïde déterminés par Oz, Oy, Ox, en admettant que c soit le plus petit d'entre eux, et posons

$$\frac{b^2-c^2}{c^2}=\lambda^2, \quad \frac{a^2-c^2}{c^2}=\lambda'^2, \quad \frac{\gamma}{\gamma'}=u.$$

Des relations

$$\alpha'^2-\alpha^2=\beta'^2-\beta^2=\gamma'^2-\gamma^2,$$

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{\gamma}{c},$$

$$\frac{x^2}{\alpha'^2}+\frac{y^2}{\beta'^2}+\frac{z^2}{\gamma'^2}=1,$$

on tire

$$(\eta) \qquad \beta'=\gamma\sqrt{u^{-2}+\lambda^2}, \quad \alpha'=\gamma\sqrt{u^{-2}+\lambda'^2}, \quad \beta=\frac{\gamma b}{c}, \quad \alpha=\frac{\gamma a}{c},$$

$$(\theta) \qquad z^2u^2+\frac{y^2}{u^{-2}+\lambda^2}+\frac{x^2}{u^{-2}+\lambda'^2}=\gamma^2,$$

équations qui permettront de déterminer γ, α, β, α', β', par suite $\gamma'=\frac{\gamma}{u}$, en fonction de u, x, y, z. D'autre part, nous remarquons que nous avons

$$P'^2=\frac{\gamma^4}{z^2u^4+\frac{y^2}{(u^{-2}+\lambda^2)^2}+\frac{x^2}{(u^{-2}+\lambda'^2)^2}}.$$

Si l'on différentie l'équation (θ) par rapport à u pour exprimer $d\gamma$ au moyen de du, on obtient

$$P'^2\,d\gamma=\gamma'^3\,du.$$

En partant des différentes relations que nous venons d'établir et en introduisant dans les résultats la masse $M=\frac{4}{3}\pi\rho abc$ de l'ellipsoïde, on trouve

$$(1) \qquad \begin{cases} dZ=-3Mm\dfrac{z}{c^3}\dfrac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ dY=-3Mm\dfrac{y}{c^3}\dfrac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ dX=-3Mm\dfrac{x}{c^3}\dfrac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Le demi-axe c', suivant Oz, de l'ellipsoïde homofocal du proposé et passant par le point m, sera donné par l'équation

$$\frac{z^2}{c'^2} + \frac{y^2}{c'^2 + b^2 - c^2} + \frac{x^2}{c'^2 + a^2 - c^2} = 1,$$

qui ne peut fournir qu'une seule valeur positive pour c'^2, les valeurs négatives se rapportant aux hyperboloïdes homofocaux. Les limites de u étant o et $\frac{c}{c'}$, on a, en définitive,

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{Z} = -\dfrac{3\mathrm{M}mz}{c^3}\displaystyle\int_0^{\frac{c}{c'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ \mathrm{Y} = -\dfrac{3\mathrm{M}my}{c^3}\displaystyle\int_0^{\frac{c}{c'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ \mathrm{X} = -\dfrac{3\mathrm{M}mx}{c^3}\displaystyle\int_0^{\frac{c}{c'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

La recherche de ces trois intégrales se ramène à celle de la suivante:

$$(3)\quad \mathrm{L} = \frac{3\mathrm{M}m}{c^3}\int_0^{\frac{c}{c'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

qui ne peut généralement s'exprimer qu'au moyen des fonctions elliptiques. En effet, on reconnaît sans peine que l'on a

$$(4)\quad \mathrm{Z} = -z\mathrm{L}, \quad \mathrm{Y} = -\frac{y\,d\lambda\mathrm{L}}{d\lambda}, \quad \mathrm{X} = -\frac{x\,d\lambda'\mathrm{L}}{d\lambda'}.$$

Dans le cas de $\lambda = \lambda'$, il ne faudra faire cette supposition qu'après avoir effectué les différentiations par rapport à λ et λ'.

Si le point attiré se trouve sur la surface de l'ellipsoïde, on a $\frac{c}{c'} = 1$, et la limite supérieure des intégrales (2) est l'unité.

Nous allons maintenant considérer deux cas particuliers.

1° *Ellipsoïde de révolution aplati.* — On a $b = a$ ou $\lambda' = \lambda$ et l'on

obtient

$$(5)\qquad \begin{cases} Z = -\dfrac{3\,M m z}{\lambda^3 c^3}\left(\lambda\dfrac{c}{c'} - \operatorname{arc\,tang}\lambda\dfrac{c}{c'}\right), \\ Y = -\dfrac{3}{2}\dfrac{M m y}{\lambda^3 c^3}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda\dfrac{c}{c'} - \dfrac{\lambda c c'}{c'^2+\lambda^2 c^2}\right), \\ X = -\dfrac{3}{2}\dfrac{M m x}{\lambda^3 c^3}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda\dfrac{c}{c'} - \dfrac{\lambda c c'}{c'^2+\lambda^2 c^2}\right), \end{cases}$$

formules dans lesquelles on devra supposer $c' = c$ quand le point attiré se trouvera sur la surface de l'ellipsoïde.

2° *Ellipsoïde de révolution allongé.* — On a $c = b$, $\lambda = 0$; d'où

$$(6)\qquad \begin{cases} Z = -\dfrac{3}{2}\dfrac{M m z}{\lambda'^3 c^3}\left[\dfrac{\lambda' c}{c'}\sqrt{1+\lambda'^2\dfrac{c^2}{c'^2}} - \log\left(\lambda'\dfrac{c}{c'} + \sqrt{1+\lambda'^2\dfrac{c^2}{c'^2}}\right)\right], \\ Y = -\dfrac{3}{2}\dfrac{M m y}{\lambda'^3 c^3}\left[\dfrac{\lambda' c}{c'}\sqrt{1+\lambda'^2\dfrac{c^2}{c'^2}} - \log\left(\lambda'\dfrac{c}{c'} + \sqrt{1+\lambda'^2\dfrac{c^2}{c'^2}}\right)\right], \\ X = -\dfrac{3}{2}\dfrac{M m x}{\lambda'^3 c^3}\left[\log\left(\lambda'\dfrac{c}{c'} + \sqrt{1+\lambda'^2\dfrac{c^2}{c'^2}}\right) - \dfrac{\lambda'\dfrac{c}{c'}}{\sqrt{1+\lambda'^2\dfrac{c^2}{c'^2}}}\right]. \end{cases}$$

69. Attraction, sur un point de sa surface, d'un ellipsoïde de révolution assez peu aplati pour qu'on puisse négliger la quatrième puissance de son aplatissement. — Supposons que l'on fasse passer le plan yOz par le point attiré ou que l'on ait $x = 0$; les deux premières des formules (5) donnent, en y faisant $c = c'$ et négligeant la quatrième puissance de λ,

$$Z = -\frac{M m z}{c^3}\left(1 - \tfrac{3}{5}\lambda^2\right),$$

$$Y = -\frac{M m y}{c^3}\left(1 - \tfrac{6}{5}\lambda^2\right);$$

d'où, pour l'attraction,

$$G = \sqrt{X^2+Y^2} = \frac{M m}{c^3}\sqrt{z^2+y^2}\left(1 - \tfrac{3}{5}\lambda^2\frac{z^2+2y^2}{z^2+y^2}\right).$$

De l'équation de la courbe méridienne

$$(1+\lambda^2)z^2 + y^2 = c^2(1+\lambda^2)$$

on déduit

$$z^2+y^2=c^2(1+\lambda^2)-\lambda^2z^2=c^2(1+\lambda^2)\left(1-\frac{\lambda^2z^2}{c^2}\right),$$

$$\sqrt{z^2+y^2}=c\left(1+\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\lambda^2\frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$\lambda^2\frac{z^2+2y^2}{z^2+y^2}=2\lambda^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right);$$

par suite,

$$G=\frac{Mm}{c^2}\left(1+\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\frac{z^2}{c^2}\right)\left[1-\tfrac{6}{5}\lambda^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\right]$$
$$=\frac{Mm}{c^2}\left[1-\tfrac{7}{10}\lambda^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\right].$$

Si l est la latitude du point attiré ou l'angle que forme la normale en ce point avec Oy, on a, aux termes du second ordre près,

$$\frac{z}{c}=\sin l$$

et enfin

$$G=\frac{Mm}{c^2}(1-\tfrac{7}{10}\lambda^2\cos^2 l).$$

Cette formule est applicable à l'accélération apparente de la gravité terrestre, en y supposant $m=1$ et en introduisant dans le second membre le terme $-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 c\cos^2 l$, relatif à l'accélération centrifuge, dans lequel T représente la durée de la révolution diurne. On a ainsi

$$G=\frac{M}{c^2}(1-\tfrac{7}{10}\lambda^2\cos^2 l)-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 c\cos^2 l.$$

En supposant que l'on ait obtenu par l'observation la valeur de g, de G en un point dont la latitude est l_1, cette formule permettra de calculer $\frac{M}{c^2}$.

On a $c=\frac{40000000^m}{2\pi}$, $T=86400^s$, et à Paris $l_1=48^\circ51'16''$, $g=9{,}8088$, ce qui conduit à la relation suivante :

$$G=9{,}830094-0{,}05074\cos^2 l. \qquad (6)$$

70. Attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur. — Considérons un ellipsoïde composé de couches semblables homogènes, mais dont la densité varie de l'une à l'autre suivant une loi déterminée que l'on pourra représenter par

$$\rho = F\left(\frac{\gamma}{c}\right).$$

L'équation (θ) du n° 68, ou

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{1}{c}\left(z^2u^2 + \frac{y^2}{u^{-2}+\lambda^2} + \frac{x^2}{u^{-2}+\lambda'^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

permettra d'exprimer ρ en fonction de u, soit $\rho = \psi(u)$.

Au lieu des équations (1) du numéro précité, nous aurons les suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} dZ = -4\pi abcm\dfrac{z}{c^3}\dfrac{\psi(u)\,u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ dY = -4\pi abcm\dfrac{y}{c^3}\dfrac{\psi(u)\,u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ dX = -4\pi abcm\dfrac{x}{c^3}\dfrac{\psi(u)\,u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

d'où l'on déduira, par l'intégration entre les limites $u = 0$, $u = \frac{c'}{c}$, les valeurs de X, Y, Z.

71. Attraction, sur un point extérieur, d'un cylindre indéfini homogène dont la section droite est une ellipse. — Supposons que l'axe des x soit l'axe du cylindre ; pour obtenir les composantes de l'attraction du cylindre sur le point m, il suffit de remplacer M, dans les formules (1) du n° 68, par sa valeur $\frac{4}{3}\pi c^3\rho(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}}$, puis de supposer λ' infini ; on trouve ainsi $X = 0$, comme on devait le prévoir, puis

$$\begin{cases} Z = -4\pi m\rho z(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^{\frac{c}{c'}}\frac{u\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ Y = -4\pi m\rho y(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^{\frac{c}{c'}}\frac{u\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

formules dont les intégrations s'effectuent facilement.

Si le point attiré se trouve sur la surface du cylindre, on a $\frac{c}{c'} = 1$; par suite,

$$Z = -4\pi m\rho z \frac{1+\lambda^2-(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2},$$

$$Y = -4\pi m\rho y \frac{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}-1}{\lambda^2}.$$

En posant

$$\frac{b}{c} = \gamma \quad \text{ou} \quad \lambda^2+1 = \gamma^2, \tag{9}$$

il vient

$$\begin{cases} Z = -4\pi m\rho z \dfrac{\gamma}{\gamma+1}, \\ Y = -4\pi m\rho y \dfrac{1}{\gamma+1}, \end{cases} \tag{10}$$

formules auxquelles Laplace est arrivé directement dans ses recherches sur la figure des anneaux de Saturne.

§ IV. — Attraction des sphéroïdes.

72. Équation aux différentielles partielles à laquelle satisfait le potentiel. — Reportons-nous au n° 54, en continuant à désigner par V le potentiel de l'attraction exercée sur un point matériel m par les masses élémentaires m', m'', ... d'un corps.

Nous avons trouvé que les composantes de cette attraction

$$X = \frac{dV}{dx} = -mS\frac{m'(x-x')}{r^3},$$

$$Y = \frac{dV}{dy} = -mS\frac{m'(y-y')}{r^3},$$

$$Z = \frac{dV}{dz} = -mS\frac{m'(z-z')}{r^3};$$

mais, si l'on remarque que

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

on a

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 3mS\frac{m'(x-x')^2}{r^5} - mS\frac{m'}{r^3},$$

$$\frac{d^2V}{dy^2} = 3mS\frac{m'(y-y')^2}{r^5} - mS\frac{m'}{r^3},$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 3mS\frac{m'(z-z')}{r^5} - mS\frac{m'}{r^3},$$

d'où

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0. \qquad (1)$$

Telle est l'équation cherchée qui est applicable à tout point ne faisant pas partie du corps attirant, puisque, les distances r ne pouvant être nulles, les différentielles premières et secondes de V restent finies.

Mais, si l'on considère la matière comme continue, c'est-à-dire comme remplissant complètement toute portion de volume d'un corps, quelque petite qu'elle soit, la formule (1) ne peut plus s'appliquer au cas où le matériel m fait partie du corps, puisque, pour les molécules contiguës, les r, $(x-x')$, $(y-y')$, $(z-z')$ sont nuls, et que les parties correspondantes des différentielles premières et secondes de $\frac{1}{r}$ se présentent sous une forme indéterminée. En considérant ce cas, concevons une sphère enveloppant le point attiré m et dont le rayon soit assez petit pour que la matière qu'elle renferme puisse être regardée comme homogène. La portion de V, relative à la masse du corps, extérieure à la sphère, satisfera à l'équation (1).

En désignant par α, β, γ les coordonnées du centre de la sphère, on a (n° 57) pour les composantes suivant Ox, Oy, Oz de l'attraction qu'elle exerce sur m,

$$-\tfrac{4}{3}\pi m\rho(x-\alpha),\ -\tfrac{4}{3}\pi m\rho(y-\beta),\ -\tfrac{4}{3}\pi m\rho(z-\gamma),$$

dont la somme des dérivées partielles prises respectivement par rapport à x, y, z est $-4\pi m\rho$. On conclut de là que, dans l'hypothèse actuelle, V satisfait à l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi m\rho.$$

Substituons maintenant aux coordonnées rectangulaires un système de coordonnées polaires, et soient

a la distance du point m à l'origine O prise dans l'intérieur du corps attirant;

θ l'angle formé avec Oz par le rayon vecteur a;

ϖ l'angle du plan mOz avec le plan xOz;

a', θ', ϖ' les valeurs analogues à a, θ, ϖ pour un point m' du sphéroïde.

Posons de plus

$$\mu = \cos\theta, \quad \mu' = \cos\theta'.$$

L'élément de la surface de la sphère ayant son centre en O et pour rayon l'unité, déterminé par un cône d'une ouverture infiniment petite dont O est le sommet et qui comprend m', a pour expression

$$d\omega' = \sin\theta' d\theta' d\varpi',$$

de sorte que, en appelant ρ' la densité du corps au point m', on peut prendre

$$m' = \rho' a'^2 d\omega' da' = -\rho' a'^2 da' d\mu' d\varpi'.$$

Nous aurons donc, pour le potentiel du point attiré,

$$V = \int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} d\mu' \int \frac{\rho' a'^2 da'}{r},$$

en faisant abstraction, pour simplifier l'écriture, du facteur m, ce qui revient à ne considérer que l'accélération due à l'attraction.

Si l'on remarque que

$$\cos(\widehat{m\,O\,m'}) = p = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi - \varpi'),$$

on a

$$r = \overline{mm'} = \sqrt{a^2 - 2aa'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi - \varpi')] + a'^2},$$

et enfin

$$(2) \quad V = \int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} d\mu' \int \frac{\rho' a'^2 da'}{\sqrt{a^2 - 2aa'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi - \varpi')] + a'^2}}.$$

En ayant égard aux valeurs

$$(\alpha) \qquad z = a\mu, \quad x = a\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi, \quad y = a\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi,$$

l'équation (1) devient (1)

$$(3)\qquad \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu}\right]+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{dV^2}{d\varpi^2}+a\frac{d^2aV}{da^2}=0.$$

ou

$$(3')\qquad \frac{d^2V}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dV}{d\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2V}{d\varpi^2}+a\frac{d^2aV}{da^2}=0;$$

---

(1) Si u désigne l'une quelconque des coordonnées x, y, z, on a d'abord

$$(A)\qquad \frac{d^2V}{du^2}=\frac{d^2V}{da^2}\frac{da^2}{du^2}+\frac{d^2V}{d\psi^2}\frac{d\psi^2}{du^2}+\frac{d^2V}{d\mu^2}\frac{du^2}{d\mu^2}+\frac{dV}{da}\frac{da^2}{du^2}+\frac{dV}{d\psi}\frac{d\psi^2}{du^2}+\frac{dV}{d\mu}\frac{d\mu^2}{du^2}.$$

Des relations

$$(B)\qquad a^2=x^2+y^2+z^2,\quad \operatorname{tang}\psi=\frac{y}{x},\quad \mu=\frac{z}{r},$$

on déduit, en ayant égard aux relations (α) du texte,

$$\frac{da}{dx}=\frac{x}{a}=\sqrt{1-\mu^2}\cos\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dx}=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\psi}{a\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$\frac{d\mu}{dx}=-\frac{zx}{a^3}=-\frac{\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\psi}{a};$$

$$\frac{d^2a}{dx^2}=\frac{1}{a^3}(y^2+z^2)=\frac{\sin^2\psi+\mu^2\cos^2\psi}{a},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2\sin\psi\cos\psi}{a^2(1-\mu^2)},$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}=\frac{z}{a^5}(2x^2-y^2-z^2)=\frac{\mu}{a^2}(2\cos^2\psi-\sin^2\psi-3\mu^2\cos^2\psi).$$

Au moyen de la formule (A) on formera l'expression $\frac{d^2V}{dx^2}$, qui donnera celle de $\frac{d^2V}{dy^2}$, en y changeant ψ en $\frac{\pi}{2}-\psi$. En ajoutant, on obtient

$$(C)\qquad \begin{cases}\dfrac{d^2V}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dy^2}=(1-\mu^2)\dfrac{d^2V}{da^2}+\dfrac{1}{a^2(1-\mu^2)}\dfrac{d^2V}{d\psi^2}\\ \qquad\qquad +\dfrac{\mu^2(1-\mu^2)}{a^2}\dfrac{d^2V}{d\mu^2}+\dfrac{1+\mu^2}{a}\dfrac{dV}{da}+\dfrac{\mu(1-3\mu^2)}{a^2}\dfrac{dV}{d\mu}.\end{cases}$$

Nous avons maintenant

$$\frac{da}{dz}=\frac{z}{a}=\mu,\qquad \frac{d\psi}{dz}=0,\qquad \frac{d\mu}{dz}=\frac{1}{a^3}(x^2+y^2)=\frac{1-\mu^2}{a};$$

$$\frac{d^2a}{dz^2}=\frac{1}{a^3}(x^2+y^2)=\frac{1-\mu^2}{a},\quad \frac{d^2\psi}{dz^2}=0,\quad \frac{d^2\mu}{dz^2}=-\frac{3(x^2+y^2)z}{a^5}=-\frac{3\mu(1-\mu^2)}{a^2}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (A) permettra d'obtenir l'expression de $\frac{d^2V}{dz^2}$, et en l'ajoutant à (C), on obtiendra l'équation (3) du texte.

73. Développement en série de l'attraction d'un sphéroïde sur un point. — Nous supposerons que le sphéroïde est entièrement compris dans la sphère ayant le point O pour centre et $Om = a$ pour rayon; s'il n'en est pas ainsi, nous ne considérerons que la portion de sa masse comprise dans cette sphère, de sorte que a' sera au plus égal à a.

Si nous désignons par δ l'angle $\widehat{mOm'}$, nous aurons

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{2a'}{a}\cos\delta + \frac{a'^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Reportons-nous au Titre V de l'Introduction en y faisant $\nu = \frac{1}{2}$, $\theta = \delta$, et, permutant entre elles les lettres a et a', nous verrons que le développement du facteur de $\frac{1}{a}$, en série ordonnée, suivant les puissances ascendantes de $\frac{a'}{a}$ est encore convergent, lors même que l'on atteint la limite $\frac{a'}{a} = 1$. Nous n'avons donc plus à nous préoccuper de la question de convergence, quelque soit le procédé employé pour arriver au développement dont il s'agit.

Si l'on fait maintenant usage de la formule du binôme, il est maintenant manifeste que, dans le développement de

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left\{1 - \frac{2a'}{a}\left[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varpi - \varpi')\right] + \frac{a'^2}{a^2}\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

le coefficient de P_ν de $\left(\frac{a'}{a}\right)^\nu$ sera une fonction entière et rationnelle du cosinus

$$p = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varpi - \varpi'),$$

et nous aurons

$$\frac{1}{r} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} P_\nu \frac{a'^\nu}{a^{\nu+1}},$$

$$V = \sum_0^\infty \frac{1}{a^{\nu+1}} \int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_\nu \, d\mu' \int \rho' a'^{\nu+2} \, da.$$

Si l'on représente par Y_ν le coefficient $\frac{1}{a^{\nu+1}}$ dans le développement de V,

on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} Y_\nu = \int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_\nu \, d\mu' \int \rho' a'^{\nu+2} da', \\ V = \sum_0^\infty \frac{Y_\nu}{a^{\nu+1}}. \end{cases}$$

En substituant le développement de V dans l'équation (3) et égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de $\frac{1}{a}$, on trouve que Y_ν, fonction entière et rationnelle de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$, satisfait à l'équation aux différentielles partielles

$$(5)\qquad \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dY_\nu}{d\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2 Y_\nu}{d\varpi^2} + \nu(\nu+1)Y_\nu = 0,$$

à laquelle satisfera également P_ν, puisque cette fonction n'est autre chose que ce que devient Y_ν quand le corps attirant se réduit à un point.

Nous donnerons à Y_ν, dont nous donnerons plus loin l'expression, le nom de *fonction sphérique de l'ordre* ν.

Supposons momentanément que l'on fasse coïncider Oz avec Om : nous aurons $\mu' = p$; ϖ' deviendra l'angle q formé par le plan $m'Om$ avec un plan fixe passant par Om. La formule (2) peut ainsi se mettre sous la forme

$$V = \int_0^{2\pi} dq \int a'^2 da' \int \frac{\rho' dp}{\sqrt{a^2 - 2aa'p + a'^2}};$$

on déduit de là, pour la composante de l'attraction suivant Om,

$$\frac{dV}{da} = -\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi} dq \int a'^2 da' \int \frac{\rho'\left(1-\frac{a'}{a}p\right)dp}{\left(1-\frac{2a'}{a}p+\frac{a'^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

En intégrant par parties, on a

$$\int \frac{\rho'\left(1-\frac{a'}{a}p\right)dp}{\left(1-\frac{2a'}{a}p+\frac{a'^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\rho'}{a'}\left(1-\frac{a'}{a}p\right)\left(1-\frac{2a'}{a}p+\frac{a'^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$- \frac{a}{a'}\int \left(1-\frac{2a'}{a}p+\frac{a'^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dp}\left[\rho'\left(1-\frac{a'}{a}\right)p\right]dp,$$

et cette intégrale devra être prise entre les limites de p qui correspondent à a' et q; comme les radicaux qui y entrent sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de $\frac{a'}{a}$, quand même ce rapport atteindrait l'unité, on voit que la composante, suivant Om, de l'attraction peut se développer en série suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$, et que, pour obtenir l'expression, il suffira de différentier, par rapport à a, la seconde des formules (4).

Pour la portion du sphéroïde extérieure à la sphère du rayon a, le rapport $\frac{a}{a'}$ étant au plus égal à l'unité, on pourra développer r^{-1} en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de ce rapport, et l'on aura

$$a' r^{-1} = \Sigma P_\nu \frac{a^\nu}{a'^\nu},$$

P_ν représentant la même fonction que ci-dessus. Désignant par $Y_\nu^{(1)}$ le coefficient de a^ν, qui sera une fonction sphérique de l'ordre ν, on aura

$$(6) \qquad \begin{cases} Y_\nu^{(1)} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_\nu d\mu' \int \frac{\rho' da'}{a'^{(\nu-1)}}, \\ V = \Sigma a^\nu Y_\nu^{(1)}. \end{cases}$$

On s'assurera, de la même manière que plus haut, que la dérivée par rapport à a de la série qui représente V est convergente. Le potentiel dû à l'attraction du sphéroïde total sur le point m s'obtiendra en faisant la somme des deux valeurs de V données par les équations (5) et (6).

Les corps célestes affectant des formes peu différentes de celle de la sphère, nous sommes conduit à chercher ce que deviennent, dans ce cas, les formules que nous venons d'établir.

74. Attraction d'une couche homogène infiniment mince terminée par deux surfaces sensiblement sphériques sur un point de sa surface extérieure. — On peut considérer l'attraction d'une pareille couche comme étant la différence géométrique de celles qui sont dues à deux autres couches limitées intérieurement par une sphère intérieure à la couche considérée, mais qui en est infiniment voisine (sphère à laquelle nous donnerons la qualification d'*auxiliaire*), et

d'autre part et respectivement par la surface extérieure et la surface intérieure de la couche considérée.

Supposons, par exemple, que la *fig.* 9 représente une section faite dans la seconde des couches fictives par un plan passant par la droite qui joint le plan attiré m au centre O de la sphère, m étant censé très voisin de la surface extérieure de cette couche.

Soient

A le rayon de la sphère;

n, n' les points où la droite On rencontre la surface extérieure et celle de la sphère;

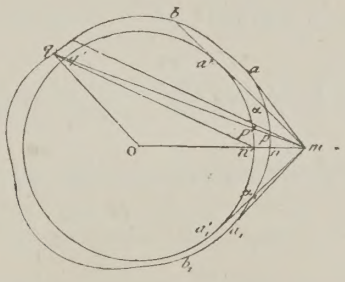
a la distance Om;

e l'épaisseur très petite nn' de la couche en n';

ρ la densité de la couche;

ma, ma_1 les tangentes menées du point m au profil de la surface extérieure, les contacts ayant lieu en a et a_1;

Fig. 9.



mb, mb_1 les tangentes pareilles menées à la circonférence intérieure, rencontrant la courbe ci-dessus en α, b et α_1, b_1, les points de tangence étant a' et a'_1;

δ l'angle formé avec Om par un rayon quelconque mq compris dans le plan de la figure, rencontrant en p et q le profil de la surface extérieure et en p', q' celui de la sphère.

D'après ce que nous avons dit au n° 66, le segment (bam, b_1a_1m) n'exerce aucune attraction sur m suivant mO, et, à plus forte raison, en est-il de même de la partie $(ba\alpha, b_1a_1\alpha_1)$ de ce segment.

La composante suivant mO de l'attraction du segment $(a'\alpha\alpha_1a'_1)$ peut

être considérée comme étant la différence de celles que produiraient les segments (ama_1), $(\alpha m\alpha_1)$, et, d'après le numéro précité, on a, pour cette composante,

$$2\pi\rho(mn' - mn) = 2\pi\rho e.$$

Considérons maintenant le segment $(a'bb_1a'_1)$ et appelons u la longueur qq' et $d\omega$ l'élément sphérique mesurant l'ouverture d'un cône élémentaire issu de m et tangent à mq; la composante suivant mO de l'attraction de ce segment sera

$$\rho\int u\,d\omega\cos\delta,$$

et l'on a, par suite, pour la composante de l'attraction totale,

$$-\frac{dV}{da} = \rho\int u\cos\delta\,d\omega + 2\pi\rho e.$$

On n'a pas à tenir compte du potentiel dû au segment $(a'\alpha\alpha_1a'_1)$, attendu qu'il est du second ordre.

En ce qui concerne le segment $(a'bb_1a'_1)$, le potentiel a pour expression

$$V = \rho\int\frac{\overline{mq}^2 - \overline{mq'}^2}{2}\,d\omega = \rho\int\frac{\overline{mq} + m'q'}{2}\,u\,d\omega = \rho\int\overline{mq'}\,u\,d\omega,$$

en négligeant le carré de u; mais on prendra, au même degré d'approximation,

$$mq' = n'q' = 2A\cos\delta.$$

On a donc

$$V = 2A\int u\cos\delta\,d\omega$$

et enfin

$$V + 2A\frac{dV}{da} = -4\pi eA\rho. \tag{7}$$

Pour la couche fictive formée par la sphère et la surface intérieure de la couche proposée, on aura une équation pareille et, en la retranchant de la précédente, on obtiendra une relation de la même forme. Donc l'équation (7) s'applique à une couche homogène infiniment mince et à un point de sa surface extérieure, pourvu qu'elle soit peu différente de la forme sphérique, e étant l'épaisseur de la couche au point attiré, estimée suivant le rayon.

75. La même formule s'applique également à la différence des attractions d'un sphéroïde peu différent d'une sphère et de cette sphère, en considérant l'épaisseur e comme positive ou négative, selon qu'elle sera extérieure ou intérieure à la sphère. Pour s'en convaincre, il suffit de retrancher les résultats de l'application de l'équation (7) à deux couches infiniment minces limitées, l'une par la surface extérieure du sphéroïde et celle de la sphère auxiliaire considérée plus haut, et l'autre par la sphère et la surface intérieure de la couche.

Si l'on fait passer la sphère de comparaison par le point attiré, on a

$$e = 0 \quad \text{et} \quad V + 2A\frac{dV}{da} = 0;$$

mais, pour la sphère entière ayant pour rayon A, on a

$$V + 2A\frac{dV}{da} = \tfrac{4}{3}\pi\rho A^3\left(\frac{1}{A} - \frac{2}{A}\right) = -\tfrac{4}{3}\pi\rho A^2,$$

et la formule

$$V + 2A\frac{dV}{da} = -\tfrac{4}{3}\pi\rho A^2$$

est par suite applicable à toute la masse du sphéroïde.

76. **Attraction d'une couche homogène très mince, peu différente de la forme sphérique sur un point de sa surface intérieure.** — La valeur de V, aux termes du second ordre près (n° 74), est la même pour le point n' que pour le point m; l'expression $-\frac{dV}{da}$ de la composante de l'attraction suivant mO devra (n° 66) être diminuée de $4\rho\pi e$.

Si donc maintenant V est censé se rapporter au point n', il faudra, dans la formule (7), remplacer $-\frac{dV}{da}$ par $-\frac{dV}{da} + 4\rho\pi e$, et l'on a, par suite,

$$V + 2A\frac{dV}{da} = 4\pi e\rho A. \tag{8}$$

77. **Attraction d'un sphéroïde homogène peu différent d'une sphère sur un point de sa surface.** — La question se réduit évidemment à déterminer l'expression de V qui se rapporte à l'excès du sphéroïde sur la sphère.

Pour les portions extérieure et intérieure de cet excès, déterminées par la sphère de rayon a, on devra faire respectivement l'application des formules (4) et (6) du n° 73.

Soient $\mathrm{A}(1+z')$ le rayon vecteur de la surface du sphéroïde correspondant aux angles θ' et ϖ'; $\mathrm{A}(1+z)$ le rayon pareil déterminé par la direction de a, c'est-à-dire celui pour lequel on a $\theta'=\theta$, $\varpi'=\varpi$. Nous supposerons que z' et ses dérivées sont des quantités assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits deux à deux. Nous pourrons ainsi remplacer, dans les premières des formules (4) et (6), les puissances de a' par les mêmes puissances de A, et nous aurons, en remplaçant ρ' par la densité constante ρ,

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Y}_\nu}{\mathrm{A}^{\nu+1}} = \rho\mathrm{A}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{+1} d\mu' \int \mathrm{P}_\nu\, da', \\ \mathrm{Y}_\nu^{(1)}\mathrm{A}^\nu = \rho\mathrm{A}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{+1} d\mu' \int \mathrm{P}_\nu\, da'. \end{cases}$$

Si l'on ajoute entre elles ces deux égalités, l'intégration par rapport à da' dans le résultat obtenu devra s'étendre à l'épaisseur totale $\mathrm{A}z'$ de la couche, et l'on aura

$$(9)\qquad \frac{\mathrm{Y}_\nu}{\mathrm{A}^{\nu+1}} + \mathrm{A}^\nu \mathrm{Y}_\nu^{(1)} = \rho\mathrm{A}^2 \int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_\nu z'\, d\mu'.$$

Des secondes des équations (4) et (6) on déduit respectivement, pour les portions V' et V'' du potentiel V qui se rapportent aux parties de la couche extérieure et intérieure à la sphère de rayon a,

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathrm{V}' + 2\mathrm{A}\dfrac{d\mathrm{V}'}{da} = \displaystyle\sum \frac{\mathrm{Y}_\nu}{a^{\nu+1}}\left[1 - 2\frac{\mathrm{A}}{a}(\nu+1)\right], \\ \mathrm{V}'' + 2\mathrm{A}\dfrac{d\mathrm{V}''}{da} = \displaystyle\sum \mathrm{Y}_\nu^{(1)} a^\nu \left(1 + 2\nu\frac{\mathrm{A}}{a}\right). \end{cases}$$

Si le point attiré se trouve sur la surface du sphéroïde, ou si

$$a = \mathrm{A}(1+z),$$

la première des expressions ci-dessus est égale à $-4\pi\rho\mathrm{A}^2 z$ (n° 74) et

la seconde est nulle, puisque l'épaisseur de la portion de la couche extérieure à la sphère de rayon a est nulle en m. On a ainsi, en faisant $a = \text{A}$, dans ces mêmes expressions,

$$-\sum \frac{Y_\nu}{A^{\nu+1}}(1+2\nu) = -4\pi\rho A^2 z,$$

$$\sum Y_\nu^{(1)} A^\nu (1+2\nu) = 0;$$

d'où

$$(b) \qquad 4\pi\rho A^2 z = \Sigma(2\nu+1)\left(\frac{Y_\nu}{A^{\nu+1}} + A^\nu Y_\nu^{(1)}\right).$$

Mais la fonction

$$\frac{Y_\nu}{A^{\nu+1}} + A^\nu Y_\nu^{(1)}$$

satisfait, comme chacun de ses termes, à l'équation aux dérivées partielles (5), d'où il suit que z, *et en général une fonction quelconque de* μ *et* ϖ, *pour toutes les valeurs de ces variables comprises entre* -1 *et* $+1$ *et* 0 *et* 2π, *pourvu qu'elle reste finie, est développable en suite, limitée ou non, de fonctions sphériques;* z peut en effet être considérée comme étant une fonction quelconque de μ et ϖ, qui reste finie entre les limites ci-dessus, multipliée par un facteur constant aussi petit que l'on voudra.

Le potentiel auquel donne lieu l'excès sphéroïdal relativement au point m de la surface du sphéroïde a pour expression

$$(c) \qquad V = \sum\left(\frac{Y_\nu}{A^{\nu+1}} + A^\nu Y_\nu^{(1)}\right).$$

Supposons que z soit développé en fonctions sphériques Z_ν ou posons

$$(d) \qquad z = \Sigma Z_\nu.$$

En portant cette expression dans l'équation (b) et identifiant les fonctions sphériques semblables contenues dans l'un des deux membres, on trouve

$$(e) \qquad \frac{Y_\nu}{A^{\nu+1}} + A^\nu Y_\nu^{(1)} = \frac{4\pi\rho A^2}{2\nu+1} Z_\nu.$$

Les formules (c) et (9) donnent, par suite, les suivantes :

$$(11)\qquad \begin{cases} V = 4\pi A^2 \rho \sum \dfrac{Z_\nu}{2\nu+1}, \\ Z_\nu = \dfrac{2\nu+1}{4\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{+1} z' P_\nu \, d\mu'. \end{cases}$$

Remarque. — Si α, β, γ sont les trois demi-axes principaux d'un ellipsoïde et r son rayon vecteur, on a, pour l'équation polaire de sa surface,

$$r^2\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varpi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varpi}{\beta^2} + \frac{\cos^2\theta}{\gamma^2}\right) = 1.$$

Si cet ellipsoïde diffère peu d'une sphère d'un rayon égal à A, on trouve facilement, pour $z = \dfrac{r-A}{A}$, en négligeant le carré de la différence, une expression de la forme

$$z = \varepsilon \sin^2\theta\cos^2\varpi + \varepsilon' \sin^2\theta\sin^2\varpi + \varepsilon'' \cos^2\theta,$$

où ε, ε', ε'' sont des constantes de l'ordre $\dfrac{\alpha-A}{A}$, $\dfrac{\beta-A}{A}$, $\dfrac{\gamma-A}{A}$.

Cette expression peut se mettre aussi sous la forme suivante :

$$z = \frac{\varepsilon(1-\mu^2)}{2}(1+\cos 2\varpi) + \frac{\varepsilon'(1-\mu^2)}{2}(1-\cos 2\varpi) + \varepsilon''\mu^2.$$

Si l'on fait $\nu = 2$ dans l'équation (5) du n° 73, on reconnaît que cette équation est satisfaite par

$$Y_2 = \left(\frac{1-\mu^2}{2}\right)(1+\cos 2\varpi) - \tfrac{1}{3},$$

$$Y_2 = \left(\frac{1-\mu^2}{2}\right)(1-\cos 2\varpi) - \tfrac{1}{3},$$

$$Y_2 = \mu^2 - \tfrac{1}{3}.$$

On voit, par suite, que l'on a

$$z = Z_2 + \tfrac{1}{3}(\varepsilon + \varepsilon' +$$

mais la constante de cette expression satisfait à la même équation quand on y fait $\nu = 0$: d'où il suit que, lorsque le sphéroïde est elliptique, on a

$$z = Z_0 + Z_2,$$

et, si l'ellipsoïde est de révolution autour de l'axe OZ ou si $\varepsilon = \varepsilon'$,

$$z = \varepsilon + \mu^2(\varepsilon'' - \varepsilon).$$

78. Propriétés caractéristiques des fonctions Y_ν. — Si Y_ν, $Y_{\nu'}$ sont deux fonctions sphériques d'ordres distincts, on a

$$(f) \qquad \int_0^{2\pi} d\varpi \int_{-1}^{1} Y_\nu Y_{\nu'}\, d\mu = 0.$$

En effet, en multipliant l'équation (5) du n° **73** par $Y_{\nu'}\, d\varpi\, d\mu$ et intégrant par rapport aux variables μ, ϖ, il vient

$$\nu(\nu+1)\int\int Y_\nu Y_{\nu'}\, d\varpi\, d\mu = -\int\int Y_{\nu'} \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dY_\nu}{d\mu}\, d\varpi\, d\mu - \int\int Y_{\nu'} \frac{d^2 Y_\nu}{d\varpi^2}\,\frac{d\varpi\, d\mu}{1-\mu^2},$$

et l'on a de même

$$\nu'(\nu'+1)\int\int Y_{\nu'} Y_\nu\, d\varpi\, d\mu = -\int\int Y_\nu \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dY_{\nu'}}{d\mu} - \int\int Y_\nu \frac{d^2 Y_{\nu'}}{d\varpi^2}\,\frac{d\varpi\, d\mu}{1-\mu^2};$$

d'où, par différence,

$$(g) \qquad \left\{ \begin{aligned} &[\nu(\nu+1) - \nu'(\nu'+1)]\int\int Y_\nu Y_{\nu'}\, d\varpi\, d\mu \\ &\quad = -\int\int \left[Y_{\nu'} \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dY_\nu}{d\mu} - Y_\nu \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dY_{\nu'}}{d\mu} \right] d\varpi\, d\mu \\ &\qquad -\int\int \left(Y_{\nu'} \frac{d^2 Y_\nu}{d\varpi^2} - Y_\nu \frac{d^2 Y_{\nu'}}{d\varpi^2} \right) \frac{d\varpi\, d\mu}{1-\mu^2}. \end{aligned} \right.$$

Or on a

$$\int \left[Y_{\nu'} \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dY_\nu}{d\mu} - Y_\nu \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dY_{\nu'}}{d\mu} \right] = (1-\mu^2)\left(Y_{\nu'} \frac{dY_\nu}{d\mu} - Y_\nu \frac{dY_{\nu'}}{d\mu} \right),$$

expression qui s'annule entre les limites -1 et $+1$ de μ, et

$$\int \left(Y_{\nu'} \frac{d^2 Y_\nu}{d\varpi^2} - Y_\nu \frac{d^2 Y_{\nu'}}{d\varpi^2} \right) d\varpi = Y_{\nu'} \frac{dY_\nu}{d\varpi} - Y_\nu \frac{dY_{\nu'}}{d\varpi},$$

résultat qui s'annule aussi entre les limites 0 et 2π de ϖ; car, d'après la forme entière et rationnelle des fonctions Y_ν, $Y_{\nu'}$ en $\cos\varpi$ et $\sin\varpi$, ces fonctions et leurs dérivées, par rapport à ϖ, reprennent les mêmes valeurs pour les deux limites. Si donc ν est différent de ν', en se reportant à l'équation (g), la formule (f) se trouve établie; mais, si $\nu = \nu'$, les deux membres de cette équation étant nuls, on ne peut pas conclure que l'intégrale du premier membre de cette formule est nulle, et elle a, en effet, une valeur déterminée dont nous chercherons plus loin l'expression.

De la même formule (f) on déduit comme conséquence

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} Y_\nu \, d\mu = 0, \tag{12}$$

lorsque ν est différent de zéro, puisque l'unité satisfait à l'équation (5) du n° 73 et qu'elle n'est d'ailleurs autre chose que P_0; on remarquera que l'on a

$$\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_0 \, d\mu' = 4\pi.$$

79. En désignant par Z'_ν ce que devient Z_ν (n° 77) lorsqu'on y change μ en μ', ϖ en ϖ', et remplaçant z' par son développement $z' = \Sigma Z'_\nu$, dans la seconde des formules (11), on a simplement, en vertu de la formule (d),

$$Z_\nu = \frac{2\nu + 1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} Z'_\nu P_\nu \, d\mu', \tag{13}$$

car P_ν, étant symétrique en μ et μ', ϖ et ϖ', est une fonction sphérique de l'ordre ν en μ' et ϖ'.

80. Pour un point extérieur suffisamment éloigné du sphéroïde, on doit prendre

$$V = \sum \frac{Y_\nu}{a^{\nu+1}};$$

et, d'après la première des formules (a) du n° 77, on a

$$Y_\nu = \rho A^{\nu+3} \int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_\nu z' \, d\mu$$

ou, en remplaçant z' par $\Sigma Z'_\nu$,

$$Y_\nu = \rho A^{\nu+3} \int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_\nu Z'_\nu \, d\mu'$$

ou encore, en vertu de l'équation (13),

$$Y_\nu = \rho A^{\nu+3} \frac{4\pi Z_\nu}{2\nu+1}.$$

Il vient donc, pour l'excès sphéroïdal,

$$V = 4\pi\rho A^3 \sum \frac{A^\nu}{a^{\nu+1}} \frac{Z_\nu}{2\nu+1} \tag{14}$$

et, pour le sphéroïde entier,

$$V = \tfrac{4}{3}\pi\rho \frac{A^3}{a} + 4\pi\rho A^3 \sum \frac{A^\nu}{a^{\nu+1}} \frac{Z_\nu}{2\nu+1}. \tag{15}$$

81. Des fonctions X_ν. — Désignons par r la distance au point m d'un point m' de Oz dont la distance a' à l'origine est inférieure à a. Nous avons

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2a'}{a}\cos\theta + \frac{a'^2}{a^2}}}.$$

Nous désignerons par X_ν le coefficient de $\left(\frac{a'}{a}\right)^\nu$ dans le développement du second membre de cette formule. Il est évident que la fonction X_ν n'est autre chose que ce que devient la fonction P_ν quand γ fait $\theta' = 0$. La première de ces fonctions satisfait donc à l'équation

$$\frac{d(1-\mu^2)\frac{dX_\nu}{d\mu}}{d\mu} + \nu(\nu+1)X_\nu = 0,$$

déduite de l'équation (5), en y supposant $Y_\nu = P_\nu = X_\nu$ et en y supprimant les termes dépendant de ϖ.

Si $X_{\nu'}$ est une fonction semblable à $X_{\nu'}$, mais d'indice différent, on a

$$\int_{-1}^{1} X_\nu X_{\nu'} d\mu = 0;$$

cette propriété résulte de l'équation (g) en y supprimant l'intégration et les dérivées qui se rapportent à ϖ et remplaçant respectivement Y_ν, $Y_{\nu'}$ par X_ν et $X_{\nu'}$.

82. Simplifications que l'on peut apporter dans le développement en série de l'attraction d'un sphéroïde peu différent d'une sphère sur un point extérieur. — Supposons que l'on prenne pour origine des coordonnées le centre de gravité O du sphéroïde et pour la sphère celle qui lui est équivalente en masse ou en volume. Le volume du sphéroïde sera, en ayant égard à la seconde des équations (11),

$$\tfrac{4}{3}\pi A^3 + A^3 \int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} z' d\mu' = \tfrac{4}{3}\pi A^3 + A^3 \int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} Z'_0 d\mu' = \tfrac{4}{3}\pi A^2 + 4\pi A^3 Z'_0,$$

d'où $Z'_0 = Z_0 = 0$ d'après l'hypothèse admise.

La fonction Z_1 est, comme la fonction P_1, une fonction linéaire de $\sin\theta\cos\varpi$, $\sin\theta\sin\varpi$, $\cos\theta$, sans constante indépendante, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$Z_1 = \alpha\sin\theta\cos\varpi + \beta\sin\theta\cos\varpi + \gamma\cos\theta,$$

α, β, γ étant trois constantes. On peut d'ailleurs s'assurer que chacun de ses termes satisfait à l'équation (5) dans l'hypothèse de $\nu = 1$, $Y_1 = Z_1$, après avoir remplacé $\cos\theta$ par μ et $\sin\theta$ par $\sqrt{1-\mu^2}$.

Nous avons, par suite,

$$(h) \qquad Z'_1 = \alpha\sin\theta'\cos\varpi' + \beta\sin\theta'\sin\varpi' + \gamma\cos\theta' = \frac{1}{A}(\alpha\chi + \beta\eta + \gamma\zeta),$$

en désignant par χ, η, ζ les coordonnées parallèles à Ox, Oy, Oz d'un élément de masse dm' de l'excès sphéroïdal, correspondant aux angles θ' et ϖ'.

Pour que le point O soit le centre de gravité du sphéroïde, il faut naturellement qu'il soit aussi celui de l'excès sphéroïdal ou que l'on ait

$$\int \chi\, dm' = 0, \quad \int \eta\, dm' = 0, \quad \int \zeta\, dm' = 0;$$

il vient donc, en multipliant l'équation (*h*) par

$$dm' = -\rho A^2 z' d\varpi' d\mu'$$

et intégrant,

$$-A^2\rho\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} Z_1' z' d\mu' = \frac{1}{A}(\alpha\int\chi\, dm' + \beta\int\eta\, dm' + \gamma\int\zeta\, dm') = 0.$$

L'intégrale du premier membre de cette équation (n° **78**) se réduisant à la suivante :

$$\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} Z_1'^2 d\mu' = \frac{4\pi}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

et il faut, pour qu'elle soit nulle, que l'on ait $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Ainsi la double hypothèse que nous avons faite permet de supprimer les deux premiers termes de la suite des fonctions sphériques qui représentent z.

83. Réduction des formules relatives à l'attraction sur un point d'un sphéroïde homogène peu différent d'une sphère. — Nous désignerons par ρ la densité du sphéroïde.

1° *Le point attiré est extérieur au sphéroïde.*

La sphère du rayon A donne lieu au potentiel

$$\tfrac{4}{3}\pi\rho\frac{A^3}{a}.$$

Considérons maintenant l'excès sphéroïdal auquel les formules (4) du n° **73** sont applicables en y faisant $\rho' = \rho$ et $a'^{\nu+2} = A^{\nu+2}$; nous aurons d'abord

$$\begin{aligned} Y_\nu &= A^{\nu+2}\rho\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_\nu d\mu' \int da' \\ &= A^{\nu+3}\rho\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_\nu z' d\mu' = A^{\nu+3}\rho\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_\nu Z_\nu' d\mu' \end{aligned}$$

ou, en vertu de la seconde des formules (11),

$$Y_\nu = \frac{4\pi\rho}{2\nu+1} A^{\nu+3} Z_\nu.$$

La seconde des formules (4) donne par suite, pour le potentiel qui se rapporte à l'excès sphéroïdal,

$$\sum \frac{Y_\nu}{a^{\nu+1}} = 4\pi\rho A^2 \sum \left(\frac{A}{a}\right)^{\nu+1} \frac{Z_\nu}{2\nu+1}.$$

On a donc, pour le potentiel total,

$$V = \tfrac{4}{3}\pi\rho \frac{A^3}{a} + 4\pi\rho A^2 \sum \left(\frac{A}{a}\right)^{\nu+1} \frac{Z_\nu}{2\nu+1}. \tag{16}$$

Soient

mM la partie de la perpendiculaire en m à Om, comprise dans le plan zOm, dirigée dans le sens de l'accroissement de θ;

mT la partie de la perpendiculaire en ce point, menée au plan ci-dessus, dirigée dans le sens de l'accroissement de ϖ;

R, M, T les composantes d'une force quelconque agissant sur m suivant Om, mM, mT, cette force étant censée dériver du potentiel V.

On a, en égalant entre elles deux expressions du travail élémentaire de la force,

$$dV = R\,da + Ma\,d\theta + Ta\sin\theta\,d\varpi;$$

d'où

$$R = \frac{dV}{da}, \quad M = \frac{dV}{a\,d\theta}, \quad T = \frac{1}{a\sin\theta}\frac{dV}{d\varpi}. \tag{17}$$

Dans le cas que nous étudions, nous avons, en vertu de la formule (16),

$$\begin{cases} R = -\tfrac{4}{3}\pi\rho \dfrac{A^3}{a^2} - 4\pi\rho A \Sigma(\nu+1)\left(\dfrac{A}{a}\right)^{\nu+2} \dfrac{Z_\nu}{2\nu+1}, \\ M = 4\pi\rho \dfrac{A^2}{a} \sum \left(\dfrac{A}{a}\right)^{\nu+1} \dfrac{1}{2\nu+1} \dfrac{dZ_\nu}{d\theta}, \\ T = 4\pi\rho \dfrac{A^3}{a\sin\theta} \sum \left(\dfrac{A}{a}\right)^{\nu+1} \dfrac{1}{2\nu+1} \dfrac{dZ_\nu}{d\varpi}. \end{cases} \tag{18}$$

2° *Le point attiré est intérieur au sphéroïde.*

Le sphéroïde peut être considéré comme formé de deux parties dont l'une est la sphère qui passe par le point attiré m. Pour éviter toute confusion, nous placerons a entre des parenthèses lorsqu'on ne devra

pas différentier, par rapport à cette constante, le potentiel pour obtenir la composante de l'attraction suivant Om. La sphère du rayon a donne le potentiel

$$(\alpha) \qquad \frac{4}{3}\pi\rho(a)^3\frac{1}{a}.$$

Supposons d'abord que l'on ait $a < A$; la couche sphérique ayant pour épaisseur $(A - a)$ ne donnera qu'un potentiel constant et que l'on peut supposer nul. Pour obtenir le potentiel de l'excès sphérique, nous appliquerons les formules (6) du n° 73, qui donnent

$$(\beta) \qquad \begin{cases} Y_\nu^{(1)} = \dfrac{\rho}{A^{\nu-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_\nu\, d\mu'\, da' = \dfrac{\rho A^2}{A^\nu}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_\nu\, d\mu'\, z'. \\ V = \Sigma a^\nu Y_\nu^{(1)}, \end{cases}$$

On déduit de là, en ayant égard à la seconde des formules (11),

$$Y_\nu^{(1)} = \frac{\rho A^2}{A^\nu}\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{1} P_\nu Z'_\nu\, d\mu' = \frac{4\pi\rho A^2}{A^\nu}\,\frac{Z_\nu}{2\nu+1},$$

$$V = 4\pi\rho A^2 \sum \left(\frac{a}{A}\right)^\nu \frac{Z_\nu}{2\nu+1},$$

d'où, pour le potentiel total,

$$(19) \qquad V = \tfrac{4}{3}\pi\rho(a)^3\frac{1}{a} + 4\pi\rho A^2 \sum \left(\frac{a}{A}\right)^\nu \frac{Z_\nu}{2\nu+1}.$$

Admettons maintenant que l'on ait $a > A$, le potentiel se composera de l'expression (α) augmentée du potentiel dû à l'action de la partie du sphéroïde extérieure à la sphère de rayon a, potentiel dont nous allons maintenant nous occuper.

Plaçons-nous momentanément à un nouveau point de vue en prenant pour sphère de comparaison celle de rayon (a) et représentons par $(a)(1 + u') = (a)(1 + \Sigma U'_\nu)$ le développement en fonctions sphériques du rayon vecteur de la surface du sphéroïde qui correspond aux coordonnées angulaires ϖ' et θ'.

La première des formules (β) recevra ici son application en y rempla-

çant A par (a) et Z' par u'. Nous aurons ainsi

$$Y_\nu^{(1)} = \frac{\rho(a)^2}{(a)^\nu}\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-0}^{1} P_\nu\, d\mu' u' = 4\pi\rho\,\frac{(a)^2}{(a)^\nu}\,\frac{U_\nu}{2\nu+1} = 4\pi\rho\,\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{A}^\nu}\,\frac{U_\nu}{2\nu+1};$$

par suite, pour le potentiel dont il s'agit,

$$V = 4\pi\rho\,\mathrm{A}^2 \sum_0 \left(\frac{a}{\mathrm{A}}\right)^\nu \frac{U_\nu}{2\nu+1}.$$

Mais de l'identité

$$\mathrm{A}(1+z) = (a)(1+u)$$

ou

$$\mathrm{A}(1+\Sigma Z_\nu) = (a)(1+\Sigma U_\nu),$$

on déduit, aux termes du second ordre près, comme nous avons continué à le faire jusqu'ici,

$$U_0 = \frac{\mathrm{A}-(a)}{\mathrm{A}} + Z_0$$

et

$$U_\nu = Z_\nu \quad \text{pour} \quad \nu > 0;$$

il vient donc

$$V = -4\pi\rho[(a)-\mathrm{A})]\,\mathrm{A} + 4\pi\rho\,\mathrm{A}^2 \sum_0 \left(\frac{a}{\mathrm{A}}\right)^\nu \frac{Z_\nu}{2\nu+1}; \tag{20}$$

d'où, pour le potentiel total,

$$V = \frac{4}{3}\pi\rho(a)^3\,\frac{1}{a} + 4\pi\rho\,\mathrm{A}^2 \sum_0 \left(\frac{a}{\mathrm{A}}\right)^\nu \frac{Z_\nu}{2\nu+1}, \tag{21}$$

en faisant abstraction du terme en $[(a)-\mathrm{A}]$, qui ne joue aucun rôle dans l'estimation des composantes de l'attraction. La formule (19) s'applique donc sans restriction à l'attraction du sphéroïde sur un point intérieur.

84. Attraction sur un point intérieur d'une couche homogène peu différente de la forme sphérique, quelle que soit son épaisseur. — Soient $\mathrm{A}(1+\Sigma Z'_\nu)$, $\mathrm{A}^{(i)}(1+\Sigma Z'^{(i)}_\nu)$ les rayons vecteurs des surfaces extérieure et intérieure de la couche correspondant aux angles θ' et ϖ'. Nous remarquerons que l'on a, aux termes du second ordre près,

$$\mathrm{A}(1+\Sigma_0 Z'_\nu) = \mathrm{A}(1+Z_0+\Sigma_1 Z'_\nu) = \mathrm{A}(1+Z_0)(1+\Sigma_1 Z'_\nu)$$

ou simplement

$$\mathrm{A}(1+\Sigma_1 Z'_\nu),$$

en substituant A à $\mathrm{A}(1+Z_0)$.

Le rayon vecteur de la surface intérieure peut de même être considéré comme se réduisant à $\mathrm{A}^{(i)}(1+\Sigma_1 Z'^{(i)}_\nu)$.

Comme le point m n'est pas influencé par la couche sphérique dont les rayons sont A, $\mathrm{A}^{(i)}$, la force attractive qui le sollicite ne peut résulter que de la différence des potentiels qui se rapportent aux excès sphériques extérieur et intérieur ou de

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} V &= 4\pi\rho\left[\mathrm{A}^2\sum_1\left(\frac{a}{\mathrm{A}}\right)^\nu\frac{Z_\nu}{2\nu+1}-(\mathrm{A}^{(i)})^2\sum_1\left(\frac{a}{\mathrm{A}^{(i)}}\right)^\nu\frac{Z_\nu^{(i)}}{2\nu+1}\right]\\ &= 4\pi\rho\sum_1\frac{a^\nu}{2\nu+1}\left[\mathrm{A}^{2-\nu}Z_\nu-(\mathrm{A}^{(i)})^{2-\nu}Z_\nu^{(i)}\right].\end{aligned}\right.$$

Pour qu'un point quelconque situé dans l'intérieur de la couche soit également attiré de toute part, il faut que V soit indépendant de a, ϖ, θ ou que

$$\frac{Z_\nu}{Z_\nu^{(i)}}=\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}^{(i)}}\right)^{2-\nu}.$$

Si la surface extérieure de la couche est elliptique, Z se réduit à Z_2 (n° 77), en faisant abstraction de Z_0, conformément à ce qui a été dit plus haut; $\Sigma Z_\nu^{(i)}$ se réduit aussi à $Z_2^{(i)}$, et l'on a

$$\frac{Z_2}{Z_2^{(i)}}=1$$

ou

$$\frac{\mathrm{A}(1+Z_2)}{\mathrm{A}^{(i)}(1+Z_2^{(i)})}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}^{(i)}}.$$

Les surfaces extérieure et intérieure de la couche sont ainsi des ellipsoïdes homothétiques, ce qui est conforme au résultat obtenu au n° 59.

85. **Attraction sur un point d'un sphéroïde formé de couches homogènes peu différentes de la forme sphérique, mais dans lequel la densité varie d'une couche à une autre.** — Nous con-

tinuerons à désigner par $a = Om$, θ, ϖ les coordonnées polaires du point attiré m relatives à l'origine O.

Soient $r = \lambda(1 + z)$ le rayon vecteur déterminé par la direction de Om, de la surface intérieure (σ) de la couche dont la densité est ρ; $z = \Sigma Z_\nu$ la suite de fonctions sphériques qui représente z, la fonction Z_ν pouvant dépendre de λ.

1° *Le point attiré est extérieur au sphéroïde.*

Pour un sphéroïde homogène limité par la surface (σ), le potentiel serait (n° 83)

$$\frac{4}{3}\pi\frac{\lambda^3}{a} + 4\pi\rho\lambda^2\sum\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\nu+1}\frac{Z_\nu}{2\nu+1}.$$

En faisant varier le rayon vecteur r d'une quantité infiniment petite, on déterminera une couche homogène limitée par la nouvelle surface (σ_1), et le potentiel auquel elle donnera lieu sera la différentielle par rapport à λ de l'expression précédente, ou

$$\frac{4\pi\lambda^2}{a}\rho\,d\lambda + 4\pi\sum\frac{\rho}{(2\nu+1)a^{\nu+1}}d(\lambda^{\nu+3}Z_\nu).$$

Revenons maintenant à la réalité, et supposons que la couche élémentaire ci-dessus appartienne au sphéroïde hétérogène; ρ sera une fonction de λ, et, si l'on désigne par λ_1 la valeur de λ qui se rapporte à la surface du sphéroïde, nous aurons pour le potentiel cherché

$$(23)\qquad V = \frac{4\pi}{a}\int_0^{\lambda_1}\rho\lambda^2\,d\lambda + 4\pi\sum\frac{1}{(2\nu+1)a^{\nu+1}}\int_0^{\lambda_1}\rho\,d(\lambda^{\nu+3}Z_\nu).$$

2° *Le point attiré est situé dans l'intérieur du sphéroïde.*

Pour la portion du sphéroïde limitée par celle (σ_2) des surfaces (σ), qui passe par le point m, on appliquera la formule (23), dans laquelle on remplacera λ_1 par (a), conformément à la notation admise au n° 83.

Considérons maintenant l'autre portion du sphéroïde. Si le sphéroïde limité par la surface (σ_2) était homogène, on devrait lui appliquer la formule (19) : en donnant un accroissement infiniment petit à λ, on déterminera une couche élémentaire homogène pour laquelle le poten

tiel sera la différentielle par rapport à A de cette même expression ou

$$4\pi\sum\frac{a^\nu}{2\nu+1}\rho\,d\left(\frac{Z_\nu}{A^{\nu-2}}\right).$$

En revenant à la réalité et supposant que la couche élémentaire appartienne au sphéroïde hétérogène, on aura, pour le potentiel cherché,

$$V=4\pi\sum\frac{a^\nu}{2\nu+1}\int_A^{A_1}\rho\,d\left(\frac{Z_\nu}{A^{\nu-2}}\right), \tag{24}$$

A étant le rayon de la sphère de comparaison sur laquelle se trouve le point attiré.

En se reportant à la formule (23), le potentiel total sera

$$\left\{\begin{aligned} V=&\frac{4\pi}{a}\int_0^A\rho A^2\,dA+4\pi\sum\frac{1}{(2\nu+1)a^{\nu+1}}\int_0^A\rho\,d(A^{\nu+3}Z_\nu)\\ &+4\pi\sum\frac{a^\nu}{2\nu+1}\int_A^{A_1}\rho\,d\left(\frac{Z_\nu}{A^{\nu-2}}\right). \end{aligned}\right. \tag{25}$$

La composante de l'attraction suivant Om sera donnée par

$$\begin{aligned}\frac{dV}{da}=&-\frac{4\pi}{3a^2}\int_0^A\rho\,dA^3-4\pi\sum\frac{\nu+1}{(2\nu+1)a^{\nu+2}}\int_0^A\rho\,d(A^{\nu+3}Z_\nu)\\ &+4\pi\sum\frac{\nu a^{\nu-1}}{2\nu+1}\int_A^{A_1}\rho\,d\left(\frac{Z_\nu}{A^{\nu-2}}\right)\end{aligned}$$

ou, en remplaçant a par $A(1+\Sigma Z_\nu)$ dans le premier terme et par A dans les deux autres,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dV}{da}=&-\frac{4\pi}{3A^2}(1-2\Sigma Z_\nu)\int_0^A\rho\,dA^3-4\pi\sum\frac{\nu+1}{(2\nu+1)A^{\nu+2}}\int_0^A\rho\,d(A^{\nu+3}Z_\nu)\\ &+4\pi\sum\frac{\nu A^{\nu-1}}{2\nu+1}\int_A^{A_1}\rho\,d\left(\frac{Z_\nu}{A^{\nu-2}}\right).\end{aligned}\right. \tag{26}$$

84. Détermination de la forme générale des fonctions P_ν et X_ν. — Dans tout ce qui précède, nous nous sommes servi de ces fonctions sans nous préoccuper de leur détermination. Nous allons chercher à arriver à la forme sous laquelle elles se présentent, en employant la méthode de Jacobi, qui est la plus simple et la plus élégante de celles qui ont été proposées jusqu'ici.

Nous prendrons pour point de départ l'identité

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A + iB\cos\alpha + iC\sin\alpha} \quad (^1),$$

(¹) Si, m et n étant indépendants de α, nous remplaçons $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ par leurs expressions en exponentielles imaginaires, nous aurons

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{1 + im\cos\alpha + in\sin\alpha} = 2\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2 + e^{\alpha i}(im+n) + e^{-\alpha i}(im-n)}$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha i}\,d\alpha}{e^{2\alpha i}(im+n) + 2e^{\alpha i} + (im-n)}$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha i}\,d\alpha}{(im+n)\left[e^{\alpha i} + \left(\frac{1-\sqrt{1+m^2+n^2}}{im+n}\right)\right]\left[e^{\alpha i} + \left(\frac{1+\sqrt{1+m^2+n^2}}{im+n}\right)\right]}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{1+m^2+n^2}}\int_0^{2\pi} \left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{1+m^2+n^2}}{im+n}\right)e^{-\alpha i}\right]^{-1}\left[1 + \left(\frac{im+n}{1+\sqrt{1+m^2+n^2}}\right)e^{\alpha i}\right]^{-1} d\alpha.$$

Mais nous avons, en développant en série,

$$\left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{1+m^2+n^2}}{im+n}\right)e^{-\alpha i}\right]^{-1} = 1 - \left(\frac{1-\sqrt{1+m^2+n^2}}{im+n}\right)e^{-\alpha i} + \left(\frac{1-\sqrt{1+m^2+n^2}}{im+n}\right)^2 e^{-2\alpha i} - \ldots,$$

$$\left[1 + \left(\frac{1+\sqrt{1+m^2+n^2}}{im+n}\right)e^{\alpha i}\right]^{-1} = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{1+m^2+n^2}}{im+n}\right)e^{\alpha i} + \left(\frac{1+\sqrt{1+m^2+n^2}}{im+n}\right)^2 e^{2\alpha i} - \ldots.$$

Dans le produit de ces deux séries, au point de vue de l'intégrale J, nous ne devons considérer que les termes indépendants de α, puisque les termes dépendant des puissances de $e^{\pm\alpha i}$, transformés en sinus et cosinus d'angles multiples de α, donneraient, par l'intégration, des résultats nuls. Dans ces conditions, le produit dont il s'agit se réduit à

$$1 + \left(\frac{1-\sqrt{1+m^2+n^2}}{1+\sqrt{1+m^2+n^2}}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{1+m^2+n^2}}{1+\sqrt{1+m^2+n^2}}\right)^2 + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{1-\sqrt{1+m^2+n^2}}{1+\sqrt{1+m^2+n^2}}\right)^{-1} = \frac{1+\sqrt{1+m^2+n^2}}{2\sqrt{1+m^2+n^2}}.$$

On a donc

$$J = \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{1 + im\cos\alpha + in\sin\alpha}.$$

Si maintenant on pose $m = \frac{B}{A}$, $n = \frac{C}{A}$, on retombe sur la formule du texte.

dans laquelle i représente $\sqrt{-1}$, et A, B, C des quantités indépendantes de la variable α.

Nous rappellerons que P_ν est le coefficient de k^ν dans le développement

$$(\beta) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-2k[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi-\varpi')]+k^2}} = \Sigma_0 P_\nu k^\nu$$

de l'inverse de la distance des deux points dont les coordonnées polaires sont k, θ, ϖ et 1, θ', ϖ'. La quantité sous le radical est donc la somme des carrés des différences

$$\begin{aligned} A &= \cos\theta' - k\cos\theta, \\ B &= \sin\theta'\cos\varpi' - k\sin\theta\cos\varpi, \\ C &= \sin\theta'\sin\varpi' - k\sin\theta\sin\varpi \end{aligned}$$

des coordonnées rectilignes de ces points; les premiers membres des formules (α) et (β) devenant identiques, on a, en égalant entre eux les seconds membres,

$$\Sigma P_\nu k^\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\cos\theta' + i\sin\theta'\cos(\varpi'-\alpha) - k[\cos\theta + i\sin\theta\cos(\varpi-\alpha)]}.$$

Si l'on développe, suivant les puissances de k, le second membre de cette égalité, et si l'on identifie de part et d'autre les coefficients de k^ν, on trouve

$$(\gamma) \qquad P_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos\theta + i\sin\theta\cos(\varpi-\alpha)]^\nu [\cos\theta' + i\sin\theta'\cos(\varpi'-\alpha)]^{-(\nu+1)} d\alpha.$$

Soient

$$(\delta) \begin{cases} [\cos\theta + i\sin\theta\cos(\varpi-\alpha)]^\nu \\ \quad = X_\nu + 2X_\nu^{(1)} i\cos(\varpi-\alpha) - 2X_\nu^{(2)}\cos 2(\varpi-\alpha) + 2X_\nu^{(3)} i\cos 3(\varpi-\alpha) - \dots, \\ [\cos\theta' + i\sin\theta'\cos(\varpi'-\alpha)]^{-(\nu+1)} \\ \quad = X'_\nu + 2X'^{(1)}_\nu i\cos(\varpi'-\alpha) - 2X'^{(2)}_\nu\cos 2(\varpi'-\alpha) + 2X'^{(3)}_\nu i\cos 3(\varpi'-\alpha) - \dots \end{cases}$$

les développements suivant les cosinus des arcs multiples de $(\varpi-\alpha)$, $(\varpi'-\alpha)$ des deux facteurs qui entrent dans l'intégrale précédente : on remarquera que le premier de ces développements est limité au terme

en $\cos\nu(\varpi - \alpha)$; le second, au contraire, est indéfini. En effectuant la multiplication des deux développements, puis l'intégration entre les limites $\alpha = 0$, $\alpha = 2\pi$, on trouve

$$(\varepsilon) \quad P_\nu = X_\nu X'_\nu - 2 X_\nu^{(1)} X_\nu'^{(1)} \cos(\varpi - \varpi') + 2 X_\nu^{(2)} X_\nu'^{(2)} \cos 2(\varpi - \varpi') - \dots.$$

Les fonctions $X_\nu^{(m)}$, $X_\nu'^{(m)}$ de θ et θ' sont identiques à un facteur numérique près; car, si l'on développe l'expression (β) suivant les puissances ascendantes de $\cos(\varpi - \varpi')$, les angles θ et θ' entreront symétriquement dans les coefficients de ces puissances, par suite dans ceux du cosinus des multiples de $(\varpi - \varpi')$.

Pour $\theta' = 0$, la formule (γ) donne, en ayant égard au premier des développements (δ),

$$P_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos\theta + i \sin\theta \cos(\varpi - \alpha)]\, d\alpha = X_\nu,$$

et l'on voit, par suite, que X_ν est le coefficient de k^ν dans le développement de

$$(1 - 2k\cos\theta + k^2)^{-\frac{1}{2}};$$

en d'autres termes, X_ν n'est autre chose que le type des fonctions que nous avons considérées au n° 81.

En supposant $\theta = 0$, on trouve de même $P_\nu = X'_\nu$, et X'_ν est ainsi le coefficient de k^ν dans le développement de

$$(1 - 2k\cos\theta' + k^2)^{-\frac{1}{2}};$$

donc les deux fonctions X_ν, X'_ν, l'une en θ, l'autre en θ', sont identiques.

Si nous posons

$$\cos\theta = \mu, \quad i \sin\theta e^{\alpha i} = z,$$

nous avons

$$\begin{aligned} 2z(\cos\theta + i\sin\theta\cos\alpha) &= z[2\mu + i\sin\theta(e^{\alpha i} + e^{-\alpha i})] \\ &= z\left(2\mu + z - \frac{1-\mu}{z}\right) = (\mu + z)^2 - 1, \end{aligned}$$

d'où

$$(\zeta) \qquad [(\mu + z)^2 - 1]^\nu = (2z)^\nu (\cos\theta + i\sin\theta\cos\alpha)^\nu$$

et, en vertu du premier des développements (δ), en y remplaçant $\varpi - \alpha$ par α,

$$\begin{aligned}[(\mu+z)^2-1]^\nu &= (2z)^\nu(X_\nu + 2X_\nu^{(1)} i\cos\alpha - 2X_\nu^{(2)}\cos 2\alpha - \dots)\\ &= (2z)^\nu(X_\nu + X_\nu^{(1)} ie^{i\alpha} - X_\nu^{(2)} e^{2i\alpha} - iX_\nu^{(3)} e^{3i\alpha} - \dots\\ &\qquad + X_\nu^{(1)} ie^{-i\alpha} - X_\nu^{(2)} e^{-2i\alpha} - iX_\nu^{(3)} e^{3i\alpha} - \dots)\\ &= (2z)^\nu\left(X_\nu + X_\nu^{(1)}\frac{z}{\sin\theta} + X_\nu^{(2)}\frac{z^2}{\sin^2\theta} + X_\nu^{(3)}\frac{z^3}{\sin^3\theta} + \dots\right.\\ &\qquad \left. - X^{(1)}\sin\theta z^{-1} + X^{(2)}\sin^2\theta z^{-2} - X_\nu^{(3)}\sin^3\theta z^{-3} + \dots\right).\end{aligned}$$

D'après une remarque faite plus haut, ce développement n'a qu'un nombre limité de termes et le coefficient de $(2z)^\nu$ s'arrête aux termes en z^ν et $z^{-\nu}$; d'où il suit que ce même développement est une fonction entière de z.

Les fonctions $X_\nu^{(m)}$ ne renferment que μ, et le coefficient de $z^{m+\nu}$ a pour valeur

$$\frac{2^\nu}{\sin^m\theta} X_\nu^{(m)} = \frac{2^\nu X_\nu^{(m)}}{(\sqrt{1-\mu^2})^m}.$$

Mais, en développant $[(\mu+z)^2-1]^\nu$, suivant les puissances de z, on trouve que ce coefficient a aussi pour valeur

$$\frac{1}{1.2.3\dots(\nu+m)}\frac{d^{\nu+m}(\mu^2-1)^\nu}{d\mu^{\nu+m}}.$$

Il vient donc

$$X_\nu^{(m)} = \frac{(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^\nu.1.2.3\dots(\nu+m)}\frac{d^{\nu+m}(\mu^2-1)^\nu}{d\mu^{\nu+m}},$$

par suite

$$(A)\qquad \begin{cases} X_\nu = \dfrac{1}{2^\nu.1.2.3\dots\nu}\dfrac{d^\nu(\mu^2-1)^\nu}{d\mu^\nu},\\ X_\nu^{(m)} = \dfrac{1.2.3\dots\nu}{1.2.3\dots(\nu+m)}(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\dfrac{d^m X_\nu}{d\mu^m}. \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à déterminer la forme des fonctions $X_\nu^{\prime(m)}$; si nous posons

$$\cos\theta' = \mu', \quad i\sin\theta' e^{i\alpha} = z',$$

nous aurons, au lieu de la formule (ζ),

$$(\zeta')\qquad [(\mu'+z')^2-1]^{-(\nu+1)} = (2z')^{-(\nu+1)}(\cos\theta' + i\sin\theta'\cos\alpha)^{-(\nu+1)}$$

ou, en nous reportant au second des développements (δ) après y avoir remplacé $(\varpi' - \alpha)$ par α.

$$[(\mu' + z')^2 - 1]^{-(\nu+1)}$$
$$= (2z')^{-(\nu+1)}\left(X'_\nu + X'^{(1)}_\nu \frac{z'}{\sin\theta'} + X'^{(2)}_\nu \frac{z'^2}{\sin^2\theta'} + X'^{(3)}_\nu \frac{z'^3}{\sin^3\theta'} + \dots \right.$$
$$\left. - X'^{(1)}_\nu \sin\theta' z^{-1} + X'^{2}_\nu \sin^2\theta' z^{-2} - \dots\right),$$

expression dans laquelle le coefficient de $z'^{-(\nu+1)+m}$ est

$$(\eta) \qquad \frac{2^{-(\nu+1)}}{\sin^m\theta'} X'^{(m)}_\nu.$$

Mais, si une fonction de $(z' + \mu')$ est développable en série ordonnée suivant les puissances entières positives et négatives de z', et si $u_{-(\nu+1)}$ est le coefficient de $z'^{-(\nu+1)}$, celui de $z'^{-(\nu+1)+m}$ sera

$$(-1)^m \frac{1.2.3\dots(\nu - m)}{1.2.3\dots\nu} \frac{d^m u_{-(\nu+1)}}{d\mu'^m} \quad (1).$$

---

(1) En effet, soit

$$f(z' + \mu') = \Sigma u_p z'^p$$

le développement d'une fonction $f(z' + \mu')$, ordonné suivant les puissances entières positives et négatives de μ'. On a, par la différentiation,

$$f'(z' + \mu')(dz' + d\mu') = \Sigma p u_p z'^{p-1} dz' + \sum \frac{du_{p-1}}{d\mu'} z'^{p-1} d\mu',$$

d'où

$$f'(z' + \mu') = \Sigma p u_p z'^{p-1} = \sum \frac{du_{p-1}}{d\mu'} z'^{p-1};$$

par suite,

$$u_p = \frac{1}{p} \frac{du_{p-1}}{d\mu'}.$$

On déduit de là successivement

$$u_p = \frac{1}{p(p-1)} \frac{d^2 u_{p-2}}{d\mu'^2} = \frac{1}{p(p-1)(p-2)} \frac{d^3 u_{p-3}}{d\mu'^3} = \dots = \frac{1}{p(p-1)\dots(p-m+1)} \frac{d^m u_{p-m}}{d\mu'^m}$$

et, en faisant $p = -(\nu + 1) + m$,

$$u_{-(\nu+1)+m} = (-1)^m \frac{1}{(\nu + 1 - m)(\nu + 2 - m)\dots\nu} \frac{d^m u_{-(\nu+1)}}{d\mu'^m}$$
$$= (-1)^m \frac{1.2.3\dots(\nu - m)}{1.2.3\dots\nu} \frac{d^m u_{-(\nu+1)}}{d\mu'^m}.$$

Le coefficient de $z'^{-(\nu+1)}$ étant $2^{-(\nu+1)}X'_\nu$, celui de $z'^{-(\nu+1)+m}$ a pour valeur

$$(-1)^m \frac{1.2.3\ldots(\nu-m)}{1.2.3\ldots\nu} 2^{-(\nu+1)} \frac{d^m X'_\nu}{d\mu'^m},$$

et, en égalant cette valeur à celle (η) que nous avons obtenue plus haut, il vient

$$(B) \qquad X'^{(m)}_\nu = (-1)^m \frac{1.2.3\ldots(\nu-m)}{1.2.3\ldots\nu} (1-\mu'^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X'_\nu}{d\mu'^m};$$

comme X_ν, X'_ν sont deux fonctions identiques, l'une en μ, l'autre en μ', nous avons, en vertu de la première des formules (A),

$$(B_1) \qquad X'_\nu = \frac{1}{2^\nu . 1.2.3\ldots\nu} \frac{d^\nu(\mu'^2-1)^\nu}{d\mu'^\nu}.$$

En ayant égard à la seconde des formules (A) et à la formule (B), le développement (ε) devient

$$(C) \quad P_\nu = X_\nu X'_\nu + 2\sum_{m=1}^{m=\nu} \frac{1.2.3\ldots(\nu-m)}{1.2.3\ldots(\nu+m)} [(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}(1-\mu'^2)]^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_\nu}{d\mu^m} \frac{d^m X'_\nu}{d\mu'^m} \cos m(\varpi-\varpi')$$

et se trouve ainsi complètement déterminé.

85. Forme générale des fonctions sphériques. — Il résulte des premières des formules (4) et (6) des n^{os} **73** et **74** que la forme générale des fonctions Y_ν s'obtiendra en multipliant P_ν par une fonction arbitraire de μ', ϖ', affectée du coefficient $d\mu' d\varpi'$ et en intégrant le résultat entre les limites $\mu' = (-1$ et $1)$, $\varpi' = (0$ et $2\pi)$. On arrive ainsi à une expression de la forme

$$(D) \qquad Y_\nu = A^{(0)}_\nu X_\nu + \sum_{m=1}^{m=\nu} (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_\nu}{d\mu^m} (A^{(m)}_\nu \cos m\varpi + B^{(m)}_\nu \sin m\varpi),$$

dans laquelle les $A^{(m)}_\nu$ et $B^{(m)}_\nu$ sont des constantes arbitraires.

De la première des formules (A) on déduit

$$X_1 = \mu, \qquad \frac{dX_1}{d\mu} = 1;$$

$$X_2 = \mu^2 - \tfrac{1}{3}, \quad \frac{dX_2}{d\mu} = 2\mu, \quad \frac{d^2 X_2}{d\mu^2} = 2,$$

et l'on a, par suite,

$$Y_1 = A_1^{(0)}\mu + (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(A_1^{(1)}\cos\varpi + B_1^{(1)}\sin 2\varpi),$$

$$Y_2 = A_2^{(0)}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \mu(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(A_2^{(1)}\cos\varpi + B_2^{(1)}\sin\varpi) + (1-\mu^2)(A_2^{(2)}\cos 2\varpi + B_2^{(2)}\sin 2\varpi)$$

ou, en employant des notations plus simples,

$$(E)\quad \begin{cases} Y_1 = \alpha_1(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varpi + \beta_1(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}\sin\varpi + \gamma_1\mu, \\ Y_2 = \alpha_2\mu(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varpi + \beta_2\mu(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}\sin\varpi + \gamma_2(\mu^2-\tfrac{1}{3}) \\ \qquad + \alpha'_2(1-\mu^2)\cos 2\varpi + \beta'_2(1-\mu^2)\sin 2\varpi. \end{cases}$$

Il est facile de reconnaître que les valeurs particulières de Y_2 obtenues à la fin du n° 77 sont comprises dans la seconde des formules précédentes.

86. Détermination de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} d\varpi \int_{-1}^{+1} Y_\nu Z_\nu \, d\mu,$$

dans laquelle Y_ν et Z_ν sont des fonctions sphériques du même ordre. — Supposons que la première de ces fonctions soit donnée par la formule (D) et soit

$$(D')\quad Z_\nu = A_\nu'^{(0)} X_\nu + \sum_{m'=1}^{m'=\nu} (1-\mu^2)^{\frac{m'}{2}} \frac{d^{m'} X_\nu}{d\mu^{m'}} [A_\nu'^{(m')}\cos m'\varpi + B_\nu'^{(m')}\sin m'\varpi].$$

Nous remarquerons d'abord que

$$(\theta)\qquad \int_0^{2\pi} \cos m\varpi \cos m'\varpi \, d\varpi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin m\varpi \sin m'\varpi \, d\varpi = 0,$$

lorsque m' est différent de m, puis que

$$(\theta')\qquad \int_0^{2\pi} \cos m\varpi \sin m'\varpi \, d\varpi = 0,$$

quels que soient les nombres entiers m et m'; et enfin que

$$(0'') \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 m\varpi\, d\varpi = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\varpi\, d\varpi = \pi.$$

Il vient donc, en effectuant l'intégration par rapport à ϖ,

$$(\lambda) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\varpi \int_{-1}^{+1} Y_\nu Z_\nu\, d\mu \\ &= \pi \int_{-1}^{+1} \left[A_\nu^{(0)} A_\nu'^{(0)} X_\nu^2 + \sum_{m=1}^{m=\nu} (1-\mu^2)^m \left(\frac{d^m X_\nu}{d\mu^m}\right)^2 (A_\nu^{(m)} A_\nu'^{(m)} + B_\nu^{(m)} B_\nu'^{(m)}) \right] d\mu. \end{aligned} \right.$$

Soit

$$Z'_\nu = A_\nu'^{(0)} X'_\nu + \sum_{m=1}^{m=\nu} (1-\mu'^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X'_\nu}{d\mu'^m} (A_\nu'^{(m)} \cos m\varpi' + B_\nu'^{(m)} \sin m\varpi')$$

ce que devient la fonction Z_ν quand on y change μ en μ', et ϖ en ϖ'.

L'expression (C) du numéro précédent peut se mettre sous la forme

$$P_\nu = X_\nu X'_\nu + 2 \sum_{m'=1}^{m'=\nu} \frac{1.2.3\ldots(\nu-m')}{1.2.3\ldots(\nu+m')} (1-\mu^2)^{\frac{m'}{2}} \frac{d^{m'} X_\nu}{d\mu^{m'}} (1-\mu'^2)^{\frac{m'}{2}} \frac{d^{m'} X'_\nu}{d\mu'^{m'}} \times (\cos m\varpi \cos m\varpi' + \sin m\varpi \sin m\varpi').$$

La formule (λ) donne, par suite, en y remplaçant Y_ν par P_ν, μ et ϖ par μ' et ϖ', X_ν par X'_ν,

$$(\lambda') \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\varpi' \int_{-1}^{+1} P_\nu Z'_\nu\, d\mu' \\ &= \pi \int_{-1}^{+1} \left[A_\nu'^{(0)} X_\nu X_\nu'^2 + 2 \sum_{m=1}^{m=\nu} \frac{1.2.3\ldots(\nu-m)}{1.2.3\ldots(\nu+m)} (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_\nu}{d\mu^m} (1-\mu'^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d^m X'_\nu}{d\mu'^m}\right)^2 \right. \\ &\qquad \left. \times (A_\nu'^{(m)} \cos m\varpi + B_\nu'^{(m)} \sin m\varpi) \right] d\mu'. \end{aligned} \right.$$

Or, d'après la seconde des formules (13) du n° 79, cette intégrale est

égale à

$$\frac{4\pi Z_\nu}{2\nu+1}=\frac{4\pi}{2\nu+1}\left[A_\nu^{\prime(0)}X_\nu+\sum_{m=1}^{m=\nu}(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mX_\nu}{d\mu^m}(A_\nu^{\prime(m)}\cos m\varpi+B_\nu^{\prime(m)}\sin m\varpi)\right],$$

et, en identifiant les coefficients des termes semblables, on trouve

$$\int_{-1}^{+1}X_\nu^{\prime 2}\,d\mu'=\frac{4}{2\nu+1}=\int_{-1}^{+1}X_\nu^2\,d\mu,$$

$$\int_{-1}^{+1}(1-\mu'^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mX_\nu'}{d\mu'^m}\,d\mu'=\frac{2}{2\nu+1}\,\frac{1.2.3\ldots(\nu+m)}{1.2.3\ldots(\nu-m)}=\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mX_\nu}{d\mu^m}\,d\mu.$$

La formule (λ) nous donne donc, en définitive,

$$(F)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}d\varpi\int_{-1}^{+1}Y_\nu Z_\nu\,d\mu\\&\quad=\frac{2\pi}{2\nu+1}\left[2A_\nu^{(0)}A_\nu^{\prime(0)}+\sum_{m=1}^{m=\nu}\frac{1.2.3\ldots(\nu+m)}{1.2.3\ldots(\nu-m)}(A_\nu^{(m)}A_\nu^{\prime(m)}+B_\nu^{(m)}B_\nu^{\prime(m)}\right]\end{aligned}\right.$$

pour la valeur de l'intégrale dont il s'agit.

87. Relation entre les moments d'inertie principaux qui se rapportent au centre de gravité d'un sphéroïde formé de couches homogènes peu différentes de la forme sphérique, mais dans lequel la densité peut varier d'une couche à une autre. — Soient

A le rayon de la sphère dont une couche diffère très peu;

ρ la densité de cette couche, qui ne dépend que de A;

$a=A(1+z)$ le rayon vecteur d'un point m de la surface intérieure de la couche;

θ, ϖ les coordonnées angulaires correspondantes;

$$(\alpha)\qquad \chi=a\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi,\quad \eta=a\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi,\quad \zeta=a\mu$$

les coordonnées linéaires de m parallèles à Ox, Oy, Oz;

$$(\beta)\qquad z=\Sigma Z_\nu$$

la suite des fonctions sphériques que représente z, les coefficients qui entrent dans ces fonctions pouvant dépendre de A.

On a, pour exprimer que le plan yOz passe par le centre de gravité,

$$\int\int\int \rho a^2 \chi \, d\varpi \, d\mu \, da = \tfrac{1}{3}\int\int\int \rho \sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi \, d\varpi \, d\mu \, da^3 = 0,$$

les intégrales par rapport à ϖ et μ étant respectivement prises entre les limites $\varpi = 0$, $\varpi = 2\pi$ et $\mu = -1$, $\mu = 1$.

En remplaçant, dans cette formule, a par $A(1+z)$ et négligeant le carré de z, il vient

$$\int\int\int \rho \sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi \, d\varpi \, d\mu (dA^3 + 3\,dA^3 z) = 0$$

ou simplement

$$\int \rho \, dA^3 \left(\int\int Z\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi \, d\varpi \, d\mu\right) = 0.$$

Mais nous avons (n° 85)

$$(\gamma) \qquad Z_1 = \alpha_1\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi + \beta_1\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi + \gamma_1\mu,$$

et $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$ est, par suite, une fonction sphérique du premier ordre. L'équation précédente se réduit donc à la suivante :

$$\int \rho \, d\left(A^3 \int\int Z_1\sqrt{1-\mu^2}\cos 2\varpi \, d\varpi \, d\mu\right) = 0;$$

d'où, en remplaçant Z_1 par sa valeur,

$$\int_0^{A_1} \rho \, d(A^3\alpha_1) = 0,$$

en représentant par A_1 la valeur de A qui se rapporte à la surface du sphéroïde. On trouverait de même, en prenant successivement les moments par rapport aux plans zOx, yOz,

$$\int_0^{A_1} \rho \, d(A^3\beta_1) = 0,$$

$$\int_0^{A_1} \rho \, d(A^3\gamma_1) = 0.$$

La densité ρ étant censée exprimée au moyen de la variable A, on voit que les constantes qui entrent dans chacune des fonctions de la même variable, que représentent respectivement α_1, β_1, γ_1, devront avoir entre elles une relation déterminée.

Mais si, comme nous le supposerons dorénavant, la constitution du sphéroïde est telle que toute portion de sa masse limitée par une

couche quelconque ait son centre de gravité au même point que la masse totale, les trois conditions qui précèdent devant être satisfaites, quelles que soient les valeurs de A_1, depuis o jusqu'à la surface du sphéroïde, il faut que l'on ait $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ ou $Z_1 = 0$, ce qui est une généralisation du second des théorèmes démontrés au n° 82.

Nous admettrons que la constitution du sphéroïde est telle que les trois axes principaux d'inertie d'une portion de la masse, limitée par une couche quelconque, coïncident avec ceux de cette masse.

Parmi les trois conditions qui doivent être remplies pour que les axes coordonnés soient les axes principaux d'inertie, considérons d'abord la suivante :

$$0 = \int\int\int \rho a^2 \chi\zeta \, d\varpi \, d\mu \, da = \tfrac{1}{5} \int\int\int \rho\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi \, da^5$$

ou, en remplaçant a par $A(1+z)$ et continuant à négliger le carré de z,

$$\begin{aligned} 0 &= \int \rho \, d\left[A^5 \int\int \mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi \, d\mu \, d\varpi + 5A^5 \int\int \mu\sqrt{1-\mu^2}\, z\cos\varpi \, d\varpi \, d\mu\right] \\ &= 5\int \rho \, d\left[A^5 \int\int \mu\sqrt{1-\mu^2}\, z\cos\varpi \, d\varpi \, d\mu\right]. \end{aligned}$$

De ce que l'on a (n° 85)

$$(\delta) \qquad \begin{cases} Z_2 = \alpha_2 \mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi + \beta_2 \mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi + \gamma_2(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) \\ \qquad + \alpha'_2(1-\mu^2)\cos 2\varpi + \beta'_2(1-\mu^2)\sin 2\varpi, \end{cases}$$

il résulte que $\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$ est une fonction sphérique du second ordre, et que l'équation précédente se réduit à la suivante :

$$\int \rho \, d\left[A^5 \int\int \mu\sqrt{1-\mu^2}\, Z_2 \cos\varpi \, d\varpi \, d\mu\right] = 0;$$

en y remplaçant Z_2 par sa valeur, on trouve, après avoir effectué les intégrations par rapport à ϖ et à μ,

$$\int \rho \, d(A^5 \alpha_2) = 0,$$

d'où, d'après ce qui a été convenu plus haut,

$$\alpha_2 = 0.$$

La condition

$$0 = \int\int\int \rho a^2 \eta\zeta \, d\varpi \, d\mu \, da$$

conduira évidemment, de la même manière, à

$$\beta_2 = 0,$$

puisque χ ne diffère de η que par le changement de ϖ en $90^\circ - \varpi$.

Il nous reste à considérer la troisième condition

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint \rho a^2 \chi \eta \, d\varpi \, d\mu \, da \\ &= \tfrac{1}{10} \iiint \rho (1-\mu^2) \sin 2\varpi \, d\varpi \, d\mu \, da^5 \\ &= \tfrac{1}{10} \int \rho \, d\left[A^5 \iint (1-\mu^2) \sin 2\varpi \, d\varpi \, d\mu + 5 A^5 \iint (1-\mu^2) z \sin 2\varpi \, d\varpi \, d\mu \right] \end{aligned}$$

ou

$$\int \rho \, d\left[A^5 \iint (1-\mu^2) z \sin 2\varpi \, d\varpi \, d\mu \right] = 0.$$

Or, d'après la formule (γ), le facteur $(1-\mu^2)\sin 2\varpi$ est une fonction sphérique du premier ordre; on a donc, par suite,

$$\int \rho \, d\left[A^5 \iint (1-\mu^2) Z_2 \sin 2\varpi \, d\varpi \, d\mu \right] = 0$$

et, en remplaçant Z_2 par sa valeur et effectuant les intégrations par rapport à ϖ et μ,

$$\int \rho \, d(A^5 \beta_2') = 0,$$

d'où

$$\beta_2' = 0.$$

La valeur (δ) se réduit ainsi à la suivante :

$$(\delta') \qquad Z_2 = \gamma_2 (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \alpha_2' (1-\mu^2) \cos 2\varpi.$$

Soient maintenant A, B, C les moments d'inertie du sphéroïde ou d'une partie du sphéroïde limitée par une couche, par rapport à Ox, Oy, Oz. Nous avons

$$\begin{aligned} A + B + C &= S.m(\eta^2 + \zeta^2) + S.m(\zeta^2 + \chi^2) + S.m(\eta^2 + \chi^2) \\ &= 2\,S.m(\chi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 2\,S.ma^2 \\ &= 2\iiint \rho a^4 d\varpi \, d\mu \, da = \tfrac{2}{5} \iiint \rho \, d\varpi \, d\mu \, dA^5 + 2\iiint \rho \, d\varpi \, d\mu \, d(A^5 z), \end{aligned}$$

$$(\varepsilon) \qquad \begin{cases} C = \iiint \rho a^4 (1-\mu^2) \, d\varpi \, d\mu \, da \\ \quad = \tfrac{1}{5} \iiint \rho (1-\mu^2) \, d\varpi \, d\mu \, dA^5 + \iiint \rho \, d\varpi \, d\mu \, d(A^5 z), \end{cases}$$

d'où

$$2C - (A+B) = -\tfrac{3}{5} \iiint \rho (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) \, d\varpi \, d\mu \, dA^5 - 3 \iiint \rho (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) \, d\varpi \, d\varpi \, d(A^5 z)$$

et, comme $(\mu^2 - \frac{1}{3})$ est une fonction sphérique du second ordre,

$$2C - (A+B) = -3 \iint \rho (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) \, dA^5 Z_2.$$

Si, dans cette expression, on remplace Z_2 par sa valeur (δ') et que l'on

effectue les intégrations par rapport à ϖ et μ, on trouve

$$2C-(A+B)=-\frac{16\pi}{15}\int\rho\, d(A^5\gamma_2).$$

En ne conservant que le premier terme de l'expression (ε), il vient

$$C=\frac{8\pi}{15}\int\rho\, dA^5.$$

Nous avons donc, aux termes du second ordre près, la relation cherchée

$$\text{(G)}\qquad \frac{2C-(A+B)}{2C}=-\frac{\int d(A^5\gamma_2)}{\int\rho\, dA^5},$$

qui nous sera très utile plus tard dans les questions relatives au mouvement des corps célestes autour de leurs centres de gravité respectifs.

CHAPITRE IV.

DE LA FIGURE DES CORPS CÉLESTES.

§ I. — Généralités.

88. Comme nous l'avons fait observer, nous sommes conduit à admettre que, à une époque fort éloignée de nous, les corps célestes se trouvaient à l'état liquide.

En faisant abstraction des actions exercées par les corps célestes sur l'un d'entre eux, que nous considérerons en particulier, les particules de ce corps, soumises uniquement à leurs actions mutuelles, ont dû prendre, les unes par rapport aux autres, des mouvements divers que les résistances passives ont successivement modifiés. Dans ces diverses phases, l'axe du moment des quantités de mouvement relatif au centre de gravité est resté constant en grandeur et en direction. Avec le temps et par l'effet des résistances passives, les oscillations des particules liquides ont fini par s'anéantir, et la masse fluide a pris une figure d'équilibre de rotation autour de l'axe du moment des quantités de mouvement.

Il résulte de là que les seules données que nous ayons sur les conditions primitives d'un astre considéré en lui-même consistent dans l'invariabilité de sa masse, de la position de son axe de rotation dans l'espace et du moment des quantités de mouvement par rapport à cet axe.

Soient

μ le moment des quantités de mouvement;
n la vitesse angulaire de la masse autour de l'axe ci-dessus défini;
I le moment d'inertie de cette masse par rapport au même axe.

Nous aurons la relation

$$\text{(1)} \qquad \text{I}n = \mu.$$

Nous commencerons par examiner l'hypothèse la plus simple que l'on a été conduit à faire sur la constitution des corps célestes, c'est-à-dire celle où l'on suppose que la masse est homogène dans toutes ses parties.

§ II. — De la figure d'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation.

89. Soient

Oz l'axe de rotation de la masse fluide parvenue à son état d'équilibre relatif;

Ox, Oy deux axes rectangulaires, perpendiculaires au précédent, entraînés dans le mouvement de rotation;

X, Y, Z les composantes parallèles à Ox, Oy, Oz de l'accélération de la résultante des forces qui sollicitent un point (x, y, z) de la masse et qui dérive d'un potentiel.

Nous avons, pour l'équation différentielle des couches de niveau,

$$\text{X}\,dx + \text{X}\,dy + \text{Z}\,dz = 0.$$

Les composantes X, Y, Z de l'accélération proviennent de la force centrifuge et des attractions, suivant la loi de la gravitation, de tous les éléments matériels du liquide; elles dépendront, par suite, en général, de la forme de la surface du liquide, de ses surfaces de niveau, et réciproquement cette forme dépendra des mêmes composantes. Cette dépendance mutuelle rend la solution du problème très difficile, même en supposant le fluide homogène, et l'on n'y est parvenu que lorsqu'on admet que l'accélération centrifuge est assez petite pour que la surface de la masse diffère peu de la forme sphérique qu'elle prendrait si la vitesse angulaire était nulle; on reconnaît alors que, dans ce cas, le fluide ne peut affecter qu'une seule figure d'équilibre, qui est celle d'un ellipsoïde autour de l'axe de rotation. Nous reporterons cette solution au paragraphe suivant, et nous nous bornerons ici à vérifier que, pour cer-

taines valeurs de la vitesse angulaire, la masse fluide peut affecter la forme d'un ellipsoïde.

90. **De la forme ellipsoïdale que peut affecter la figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène, animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe et dont les éléments matériels ne sont soumis qu'à leurs attractions mutuelles suivant la loi de la gravitation.** — Reportons-nous au n° 68, et principalement aux formules (1) de ce numéro, en y faisant $\frac{c}{c'} = 1$, puisque nous n'avons ici à nous occuper que de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point de sa surface; nous avons d'abord, pour l'équation de l'ellipsoïde,

$$z^2 + \frac{y^2}{1+\lambda^2} + \frac{x^2}{1+\lambda'^2} = c^2.$$

Si nous posons

$$(a)\qquad \begin{cases} \mathrm{R} = \dfrac{3\mathrm{M}}{c^3}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ \mathrm{Q} = \dfrac{3\mathrm{M}}{c^3}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ \mathrm{P} = \dfrac{3\mathrm{M}}{c^3}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

les composantes, suivant Oz, Oy, Ox, de l'accélération due à l'attraction de l'ellipsoïde sur un point de sa surface seront

$$\mathrm{Z} = -\mathrm{R}z, \quad \mathrm{Y} = -\mathrm{Q}y, \quad \mathrm{X} = -\mathrm{P}x,$$

et celles de l'accélération centrifuge

$$\mathrm{Z} = 0, \quad \mathrm{Y} = n^2y, \quad \mathrm{X} = n^2x.$$

L'équation différentielle de la surface libre du liquide est donc

$$\mathrm{R}z\,dz + (\mathrm{Q} - n^2)\,y\,dy + (\mathrm{P} - n^2)\,x\,dx = 0,$$

d'où, pour l'équation de cette surface,

$$(b)\qquad z^2 + \frac{\mathrm{Q} - n^2}{\mathrm{R}}y^2 + \frac{\mathrm{P} - n^2}{\mathrm{R}}x^2 = \text{const.}$$

Pour que cette équation coïncide avec celle de l'ellipsoïde, il faut que

$$(2)\qquad \frac{Q-n^2}{R}=\frac{1}{1+\lambda^2},\quad \frac{P-n^2}{R}=\frac{1}{1+\lambda'^2},$$

d'où, par l'élimination de n,

$$(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)(Q-P)=R(\lambda'^2-\lambda^2)$$

et, en remplaçant P, Q, R par leurs valeurs,

$$(\lambda^2-\lambda'^2)\left[(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)\int_0^1\frac{u^4\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}-\int_0^1\frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}\right]=0.$$

Cette équation se décompose en deux autres : la première,

$$(3)\qquad \lambda^2-\lambda'^2=0,$$

donne l'ellipsoïde de révolution aplati ; la seconde, mise sous la forme

$$\int_0^1\left[(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)u^2-(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)\right]\frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

ou, en réduisant,

$$(4)\qquad \int_0^1\frac{u^2(1-u^2)(1-\lambda^2\lambda'^2u^2)\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

ne peut être satisfaite que par des valeurs positives de λ^2, λ'^2 ; car, si d'abord ces deux quantités étaient de signes contraires, tous les éléments de l'intégrale seraient positifs ; si elles étaient négatives ou si l'on avait (n° 68) $b<c$, $a<c$, leurs valeurs absolues, ou $\left(\frac{c^2-b^2}{c^2}\right)$, $\left(\frac{c^2-a^2}{c^2}\right)$, seraient inférieures à l'unité, et tous les éléments de l'intégrale seraient encore positifs comme $1-\lambda^2\lambda'^2u^2$. Donc :

Si l'ellipsoïde à trois axes inégaux est une figure d'équilibre, l'axe de rotation est le plus petit des axes principaux.

Pour toutes valeurs de λ'^2 inférieures à l'inverse de celle de λ^2 choisie arbitrairement, tous les éléments de l'intégrale seraient positifs et finis,

et l'intégrale ne serait pas nulle. Ainsi l'équation (4) ne peut être satisfaite qu'autant que l'une des deux quantités λ^2, λ'^2 est supérieure à l'unité ou que l'un des rapports $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ est supérieur à $\sqrt{2}$. Donc *l'ellipsoïde à trois axes inégaux doit différer sensiblement de la sphère, et l'on ne peut admettre, par suite, que sa figure soit celle des astres du système solaire.* Néanmoins cette forme n'a rien d'impossible pour certains astres, et l'on pourrait expliquer de cette manière les variations périodiques qu'éprouve l'éclat de quelques étoiles de la constellation de Sirius.

Si, λ restant constant, λ' augmente indéfiniment, l'intégrale (4) deviendra négative, de sorte qu'à chaque valeur de λ^2 répondra au moins une valeur réelle et positive de λ'^2 et, par suite, une surface ellipsoïdale à trois axes inégaux. Nous compléterons ultérieurement cette discussion.

En désignant par ρ la densité du fluide, la masse M de l'ellipsoïde et son moment d'inertie I par rapport à Oz ont respectivement pour expressions

$$(c)\quad \begin{cases} M = \frac{4}{3}\pi\rho c^3 (1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}} (1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}}, \\ I = \frac{M}{5}(a^2+b^2) = \frac{M}{5}c^2(2+\lambda^2+\lambda'^2) = \frac{M}{5}\left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{2+\lambda^2+\lambda'^2}{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{3}}(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{3}}}. \end{cases}$$

De la première des formules (2) on tire

$$(d)\qquad n^2 = Q - \frac{R}{1+\lambda^2}.$$

Pour l'ellipsoïde de révolution, on remplacera, dans cette équation, R, Q par leurs valeurs $-\frac{Z}{z}$, $-\frac{Y}{y}$, déduites des équations (5) du n° 68 dans l'hypothèse de $\frac{c}{c'} = 1$, et l'on obtiendra, eu égard à la valeur ci-dessus de M, lorsqu'on y fait $\lambda = \lambda'$,

$$(5)\qquad \frac{n^2}{4\pi\rho} = \frac{1}{2\lambda^3}[(3+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda - 3\lambda]$$

et, en vertu de l'équation (1) du paragraphe précédent et en ayant égard à la seconde des valeurs (c),

$$(6)\qquad \frac{25}{6}\frac{\mu^2}{M^3}\left(\frac{4\pi\rho}{M}\right)^{\frac{1}{3}} = (1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}\frac{(3+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda - 3\lambda}{\lambda^3}.$$

Revenons maintenant à l'ellipsoïde à trois axes inégaux et remplaçons dans l'équation (d) les quantités Q et R par leurs valeurs (a), nous obtiendrons

$$n^2 = \frac{3M}{c^3}\int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)[(\lambda^2-\lambda^2\lambda'^2)(1+u^2)]du}{(1+\lambda^2)(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ou, en ajoutant cette équation à l'équation (4) multipliée par $\frac{1}{1+\lambda^2}$,

$$(5')\qquad \begin{cases} n^2 = \dfrac{3M}{c^3}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \quad = 4\pi\rho(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

De là on déduit, en remplaçant n^2 par sa valeur déduite de l'équation (1) du § I et en ayant égard à la seconde des formules (c),

$$(6')\qquad \mu^2 = \frac{3M^3}{25}\left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{(2+\lambda^2+\lambda'^2)^2}{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{6}}(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{6}}}\int_0^1 \frac{u^2(1-u^2)\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les équations (4) et (6') permettront de déterminer λ^2 et λ'^2 lorsque le moment de rotation μ sera donné, et réciproquement, si l'on donne à λ^2, λ'^2 des valeurs positives satisfaisant à l'équation (4), l'équation (6') fournira toujours pour μ une valeur réelle.

Remarque. — Les composantes $-Rz$, $-(Q-n^2)y$, $-(P-n^2)x$ de l'accélération d'un point de la surface de l'ellipsoïde étant proportionnelles aux dérivées partielles par rapport à z, y, x du premier membre de l'équation (b) de cette surface, leur résultante ou *la pesanteur à la surface est proportionnelle à la racine carrée de la somme des carrés de ces dérivées* ou *à l'inverse de la distance de l'ellipsoïde au plan tangent mené au point considéré.*

91. Examen des conditions qu'exige l'ellipsoïde de révolution comme figure d'équilibre. — Pour établir cette discussion, admettons en premier lieu que l'on se donne la vitesse angulaire n et non le moment de rotation μ.

En posant

$$\frac{n^2}{4\pi\rho} = \varepsilon,$$

l'équation (5) devient

$$(a) \qquad \varepsilon = \frac{1}{2\lambda^3}[(3+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda - 3\lambda]$$

ou

$$(b) \qquad \frac{3\lambda + 2\varepsilon\lambda^3}{3+\lambda^2} - \operatorname{arc\,tang}\lambda = 0.$$

Les valeurs de λ tirées de cette équation sont égales deux à deux et de signes contraires; nous n'avons donc qu'à déterminer le nombre et la valeur des racines réelles et positives de cette équation. Considérons, à cet effet,

$$(c) \qquad y = \frac{3\lambda + 2\varepsilon\lambda^3}{3+\lambda^2} - \operatorname{arc\,tang}\lambda$$

comme l'ordonnée d'une courbe dont λ serait l'abscisse. Nous avons

$$(d) \qquad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{2\lambda^2[\varepsilon\lambda^4 + 2(5\varepsilon - 1)\lambda^2 + 9\varepsilon]}{(1+\lambda^2)(3+\lambda^2)^2}.$$

Cette expression est nulle pour $\lambda = 0$ et positive pour de très petites valeurs de λ; la courbe est par suite tangente, à l'origine, à l'axe des abscisses et commence à s'élever au-dessus de cet axe du côté des abscisses positives. Pour que l'équation (b) ait ses racines réelles, il faut que la courbe, après s'être élevée jusqu'à un certain point, s'abaisse ensuite vers l'axe des abscisses, puis qu'elle le rencontre; en d'autres termes, il faut qu'elle ait un point maximum ou que l'équation suivante en λ^2,

$$(e) \qquad \varepsilon\lambda^4 + 2(5\varepsilon - 1)\lambda^2 + 9\varepsilon = 0$$

ait ses racines réelles et positives.

Ces racines étant

$$(f) \qquad \lambda^2 = \frac{1-5\varepsilon}{\varepsilon} \pm \frac{4}{\varepsilon}\sqrt{\left(\tfrac{5}{16} - \varepsilon\right)^2 - \left(\tfrac{3}{16}\right)^2},$$

on voit qu'il faut, pour que les deux conditions dont il s'agit soient

remplies, que l'on ait

$$\varphi < \tfrac{1}{8}.$$

Mais il faut aussi que la courbe ait un point minimum situé au-dessous de cet axe ou que la plus grande des racines (f) rende y négatif, puisque l'ordonnée finit par devenir positive et indéfiniment croissante. En éliminant φ entre les équations (c) et (e) et exprimant ensuite que l'ordonnée est négative, on arrive à l'inégalité

$$(g) \qquad \operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{(7\lambda^2+9)\lambda}{(\lambda^2+1)(\lambda^2+9)} > 0,$$

dont le premier membre est nul pour $\lambda = 0$; il en est de même de sa dérivée

$$\frac{32\lambda^4(\lambda^2-3)}{(\lambda^2+1)^2(\lambda^2+9)^2}.$$

Cette dérivée devient ensuite négative, redevient nulle pour $\lambda = \sqrt{3}$, valeur à partir de laquelle elle reste constamment positive. Le premier membre de l'inégalité (g) commence donc par être négatif, devient nul pour une valeur de λ supérieure à $\sqrt{3}$, puis reste constamment positif. On voit donc que l'on satisfera à cette inégalité pour toute valeur de λ plus grande que la racine positive de l'équation

$$\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{(7\lambda^2+9)\lambda}{(\lambda^2+1)(\lambda^2+9)} = 0,$$

racine dont la valeur approchée est

$$\lambda = 2{,}5293;$$

d'où, en se reportant à la formule (a),

$$(h) \qquad \varphi = \frac{n^2}{4\pi^2} = 0{,}1123.$$

Si donc l'équation (e) a une racine plus grande que 2,5293, l'équation (b) aura deux racines positives, l'une inférieure, l'autre supérieure à ce chiffre, pour lequel les deux racines sont égales; d'où il suit que le problème aura deux solutions lorsque

$$\lambda > 2{,}5293, \quad \varphi < 0{,}1123,$$

et une seule pour

$$\lambda = 2{,}5293, \quad \varphi = 0{,}1123.$$

Si, à partir de 2,5293, λ croît indéfiniment, la valeur de φ déduite de l'équation (e), où

$$\varphi = \frac{2\lambda^2}{(\lambda^2+1)(\lambda^2+9)},$$

tendra vers zéro; d'où il suit que la plus grande vitesse angulaire compatible avec la figure de l'ellipsoïde de révolution sera donnée par la formule (h). En faisant décroître n depuis cette limite jusqu'à zéro, l'une des racines (f) augmente indéfiniment et l'autre tend vers zéro; l'un des ellipsoïdes s'aplatit indéfiniment jusqu'à devenir un plan, tandis que l'autre converge vers la sphère, qu'il atteint lorsque $n = 0$. A cette limite, ce qui est évident *a priori*, il n'y a plus en réalité que la sphère qui soit une forme d'équilibre.

92. **Cas d'un mouvement de rotation très lent.** — Si n ou φ, ce qui revient au même, est très petit, une des racines positives en λ de l'équation (b) sera également très petite, et, en prenant

$$\operatorname{arc\,tang}\lambda = \lambda - \frac{\lambda^2}{3} + \ldots,$$

$$\frac{1}{3+\lambda^2} = \frac{1}{3} - \frac{\lambda^2}{9} + \ldots,$$

la même équation donne, après avoir supprimé le facteur λ et en négligeant les puissances de λ supérieures à la seconde,

$$\lambda^2 = \tfrac{15}{2}\varphi.$$

L'aplatissement sera, au degré d'approximation convenu [1],

$$\frac{\lambda^2}{2} = \frac{15}{4}\varphi = \frac{15}{4}\,\frac{n^2}{4\pi\rho} = \frac{5}{4}\,\frac{n^2 c}{\frac{4}{3}\pi\rho c}.$$

---

[1] En remarquant que les deux demi-axes sont c et $c\sqrt{1+\lambda^2} = c\left(1+\frac{\lambda^2}{2}\right)$.

Donc *l'aplatissement est égal aux* $\frac{5}{4}$ *du rapport de la force centrifuge, mesurée à l'équateur, à l'attraction à la surface.*

L'autre racine de l'équation (*b*) a pour valeur

$$\lambda = \frac{\pi}{4\varphi} - \frac{8}{\pi} - 3\varphi\left(\frac{32}{\pi^2} - 1\right),$$

aux termes du second ordre près en φ (1).

93. Si la valeur de φ dépasse la limite 0,1123, à partir de laquelle, comme nous le verrons plus loin, l'ellipsoïde à trois axes inégaux n'est également plus admissible, il ne faut pas en conclure que la figure permanente du liquide est impossible ou que le fluide se dissipe; car, si l'on excepte le cas où la figure est peu différente d'une sphère, on n'a pas encore démontré que la formule elliptique est la seule qui convienne à l'équilibre : on n'a pas même prouvé que la sphère est la seule figure que peut prendre une masse fluide en repos dont les molécules s'attirent mutuellement, quoiqu'il soit naturel d'admettre qu'il ne peut pas en être autrement.

---

(1) Posons

$$y = \operatorname{arc\,tang}\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{x};$$

il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} = \sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^{m+1}x^{2m};$$

d'où, en intégrant,

$$y = \frac{\pi}{2} + \sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m+1}x^{2m+1}$$

ou

$$\operatorname{arc\,tang}\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda^3} - \frac{1}{5\lambda^5} + \ldots.$$

Nous avons aussi

$$(3+\lambda^2)^{-1} = \frac{1}{\lambda^2}\left(1+\frac{3}{\lambda^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{3}{\lambda^4} + \frac{9}{\lambda^6} - \ldots;$$

l'équation (*b*) devient

$$2\varphi\left(\lambda - \frac{3}{\lambda} + \frac{9}{\lambda^3} + \ldots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\lambda} + \frac{28}{3}\frac{1}{\lambda^3} - \frac{135}{5}\frac{1}{\lambda^5} + \ldots,$$

et l'on en déduit la valeur approchée de λ donnée dans le texte.

Ne pourrait-il pas se faire que, ν dépassant 0,1123 à l'origine du mouvement, la figure d'équilibre finît par devenir un ellipsoïde de révolution? Rien ne paraît s'y opposer; car, en s'aplatissant de plus en plus, la masse prendrait une vitesse angulaire plus faible; on comprend ainsi que, après une série d'oscillations moléculaires successives, finalement détruites par les résistances passives, la masse puisse parvenir à un état de mouvement satisfaisant aux conditions ci-dessus établies et qu'elle prenne une figure permanente.

94. On est donc conduit à chercher *si, pour des conditions initiales données du mouvement de la masse fluide, ou pour toute valeur du moment de rotation, il y a toujours une figure elliptique de révolution qui convient à l'équilibre, et s'il n'y en a qu'une seule.*

En posant

$$q = \frac{25}{6}\,\frac{\mu^2}{M^3}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}},$$

quantité qui se rapporte uniquement au mouvement primitif de la masse, l'équation (6) devient

$$q = (1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}\,\frac{(3+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda - 3\lambda}{\lambda^3},$$

et l'on reconnaît facilement que son second membre est nul et infini avec λ; il suit de là qu'il y a au moins une valeur positive de λ qui rend ce second membre égal au premier. Pour démontrer que cette valeur est unique, il suffit de faire voir que la dérivée du second membre est positive pour toute valeur de λ. Si l'on pose

$$f(\lambda) = \frac{(3+\lambda^2)\lambda}{3+2\lambda^2} - \operatorname{arc\,tang}\lambda,$$

la dérivée dont il s'agit est

$$\tfrac{1}{3}(1+\lambda^2)^{\frac{1}{3}}\left[\operatorname{arc\,tang}\lambda + \frac{9}{\lambda^4}(3+3\lambda^2)f(\lambda)\right]$$

et est positive pour toute valeur positive de λ, attendu qu'elle est nulle pour $\lambda = 0$ et que la dérivée

$$f'(\lambda) = \frac{\lambda^2(1+2\lambda^2)}{(1+\lambda^2)(3+2\lambda^2)^2}$$

reste elle-même positive. Ainsi donc, pour chaque valeur de q ou de μ, il y a une figure d'équilibre et une seule, qui est celle d'un ellipsoïde de révolution.

95. Expression de l'accélération de la pesanteur à la surface de l'ellipsoïde. — Soit g cette accélération au point (x, y, z) de la surface; on a, d'après les formules (5) du n° 68, en y faisant $\frac{c}{c'} = 1$, $M = \frac{4}{3}\rho\pi c^3(1+\lambda^2)$,

$$R = 4\pi\rho(1+\lambda^2)\frac{\lambda - \operatorname{arc\,tang}\lambda}{\lambda^3},$$

$$Q = P = 4\pi\rho\frac{(1+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda - \lambda}{2\lambda^3}.$$

Les composantes de g suivant les trois axes étant

$$-Rz,\ -Qy + n^2y,\ -Px + n^2x,$$

il vient

$$g = \sqrt{R^2z^2 + (Qy - n^2)(y^2 + x^2)}$$

ou, en vertu de l'équation (d) du n° 90,

$$g = \frac{R}{1+\lambda^2}\sqrt{(1+\lambda^2)z^2 + y^2 + x^2}.$$

Pour exprimer cette valeur en fonction de la latitude l, nous pourrons supposer que le point attiré est situé dans le plan zOy ou que $x = 0$. Au moyen des relations

$$z^2 + \frac{y^2}{1+\lambda^2} = c^2, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} l,$$

on trouve

$$g = \frac{Rc}{\sqrt{1+\lambda^2\cos^2 l}}.$$

Si l'ellipsoïde est assez peu aplati pour que l'on puisse négliger la quatrième puissance de λ, il vient

$$g = Rc\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \frac{Rc}{2}\lambda^2\sin^2 l;$$

l'accélération de la pesanteur varie ainsi proportionnellement au carré du sinus de la latitude.

On peut mettre cette dernière formule sous la forme

$$g = k(1 - k' \cos 2l),$$

k et k' étant deux constantes dont la première représente la valeur de la pesanteur à la latitude de 45°.

96. Discussion relative à la possibilité de l'ellipsoïde à trois axes inégaux comme forme d'équilibre. — Pour continuer la discussion que nous avons commencée au n° 90, nous remplacerons, dans les formules (4), (5′), (6′), la variable u par une autre ζ, déterminée par la relation

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}},$$

et nous poserons

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{s}}, \quad \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{t}},$$

d'où

$$s = \frac{1}{1+\lambda^2}, \quad t = \frac{1}{1+\lambda'^2};$$

puis

$$\mathrm{R} = \sqrt{(\zeta+1)(s\zeta+1)(t\zeta+1)},$$

$$\varphi = \frac{n^2}{4\pi\rho}, \quad q = \frac{25}{6}\frac{\mu^2}{\mathrm{M}^3}\left(\frac{4\pi\rho}{3\mathrm{M}}\right)^{\frac{1}{3}};$$

ces formules deviennent

$$(7) \qquad (1-s-t)\int_0^\infty \frac{\zeta\, d\zeta}{\mathrm{R}^3} - st\int_0^\infty \frac{\zeta^2\, d\zeta}{\mathrm{R}^3} = 0,$$

$$(8) \qquad \varphi = \frac{st}{2}\int_0^\infty \frac{\zeta\, d\zeta}{(s\zeta+1)(t\zeta+1)\mathrm{R}},$$

$$(9) \qquad q = \frac{1}{2}\frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{4}{3}}}\varphi = \frac{1}{4}\frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{1}{3}}}\int_0^\infty \frac{\zeta\, d\zeta}{(s\zeta+1)(t\zeta+1)\mathrm{R}}$$

et s et t sont les inconnues de la question. L'équation (7) montre que l'on a $s+t<1$ ou $s<1$, $t<1$, ou encore $c<b$, $c<a$, c'est-à-dire que le plus petit diamètre principal de l'ellipsoïde est l'axe de rotation, ce que nous savions déjà.

Pour discuter l'équation (7), représentons par F son premier membre, soit

$$\text{(10)} \qquad F = (1 - s - t)\int_0^\infty \frac{\zeta\, d\zeta}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{\zeta^2\, d\zeta}{R^3}.$$

En posant

$$\text{(11)} \qquad 2A_0 = \int_0^\infty \frac{\zeta(\zeta+1)}{R^3}[2 + (3 - s - t)\zeta - st\zeta^2]\, d\zeta,$$

$$\text{(11')} \qquad 2A_1 = \int_0^\infty \frac{\zeta^2(\zeta+1)}{R^3}[2 + (3 - s - t)\zeta - st\zeta^2]\, d\zeta,$$

on a

$$\text{(12)} \qquad \frac{dF}{ds} = -A_0 - A_1 t,$$

et, comme s et t entrent symétriquement dans F, on doit avoir aussi

$$\text{(12')} \qquad \frac{dF}{dt} = -A_0 - A_1 s.$$

Nous allons maintenant prouver que A_0 et $2A_0 + 3A_1$ sont positifs. En intégrant, entre o et ∞, l'identité

$$\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\zeta^2}{(s\zeta+1)(t\zeta+1)R}\right] = \frac{4\zeta + (3 + s + t)\zeta^2 - 2st\zeta^3 - 3st\zeta^4}{2(s\zeta+1)(t\zeta+1)R^3},$$

on a

$$\text{(13)} \qquad 0 = \int_0^\infty \frac{\zeta(\zeta+1)}{R^5}[4 + (3 + s + t)\zeta - 3st\zeta^2 - 3st\zeta^3]\, d\zeta,$$

et, en retranchant de l'équation (11) la moitié de ce résultat, il vient

$$2A_0 = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{\zeta^2(\zeta+1)}{R^5}(1 - s - t + st\zeta^2)\, d\zeta.$$

En ajoutant les équations (11) et (11'), multipliées respectivement par 1 et $\frac{3}{2}$, à l'équation (12), multipliée par $-\frac{1}{2}$, on trouve

$$2A_0 + 3A_1 = \tfrac{3}{2}(3 - s - t)\int_0^\infty \frac{\zeta^2(\zeta+1)^2\, d\zeta}{R^5},$$

et, à l'inspection des valeurs de A_0 et de $2A_0 + 3A_1$, on voit qu'elles sont nécessairement positives.

Il suit de là que les dérivées $\frac{dF}{ds}$, $\frac{dF}{dt}$, mises sous la forme

$$\frac{dF}{ds} = -A_0(1 - \tfrac{2}{3}t) - \frac{t}{3}(2A_0 + 3A_1),$$

$$\frac{dF}{dt} = -A_0(1 - \tfrac{2}{3}s) - \frac{s}{3}(2A_0 + 3A_1),$$

sont négatives et que, par suite, la fonction F est décroissante quand on fait croître s et t.

Pour une valeur de t comprise entre 0 et 1, l'équation (7) admet pour s au moins une racine comprise entre les mêmes limites, puisque les hypothèses $s = 0$, $s = 1$ donnent, pour le premier membre, deux résultats de signes contraires. Cette racine est unique; en effet, en admettant qu'il y en ait plusieurs, et soit s' la plus grande, comme on doit avoir

$$s' + t < 1,$$

on aurait *a fortiori*

$$s + t < 1;$$

mais, en faisant décroître s depuis s' jusqu'à zéro, la fonction F va en croissant à partir de zéro et ne peut plus s'annuler; par suite, l'hypothèse d'une seconde racine est inadmissible. De même, à chaque valeur de s comprise entre 0 et 1 correspond pour t une racine de l'équation (7) comprise entre les mêmes limites.

Faisons décroître s à partir de sa plus grande valeur 1 : la fonction F croîtra et ne pourra redevenir nulle que si t augmente. On finira par avoir $t = s$, puis $t > s$; mais il est clair que l'on peut se borner à considérer les valeurs de s et t pour lesquelles s est plus grand que t, ce qui revient à supposer que b est le plus petit des deux demi-axes de l'équateur. En désignant par τ la valeur de t correspondant à $s = t$, l'équation (7) devient

$$(14) \qquad (1 - 2\tau)\int_0^\infty \frac{\zeta\, d\zeta}{(\tau\zeta + 1)^3(\zeta + 1)^{\frac{3}{2}}} = \tau^2 \int_0^\infty \frac{\zeta^2\, d\zeta}{(\tau\zeta + 1)^3(\zeta + 1)^{\frac{3}{2}}};$$

la valeur de τ est un peu supérieure à $\frac{1}{3}$, et t variant de 0 à τ, s varie de 1 à τ.

Discussion relative à la vitesse angulaire. — On a

$$dv = \frac{dv}{ds}\,ds + \frac{dv}{dt}\,dt, \quad \frac{d\mathrm{F}}{ds}\,ds + \frac{d\mathrm{F}}{dt}\,dt = 0,$$

d'où, par l'élimination de ds,

$$dv = \frac{dt}{\dfrac{d\mathrm{F}}{ds}}\left(\frac{dv}{dt}\,\frac{d\mathrm{F}}{ds} - \frac{dv}{ds}\,\frac{d\mathrm{F}}{dt}\right). \tag{15}$$

Or, en posant

$$\mathrm{B}_0 = \int_0^\infty \frac{\zeta(\zeta+1)^2}{\mathrm{R}^5}\left(1 - \tfrac{1}{2}st\zeta^2\right)d\zeta, \quad \mathrm{B}_1 = \int_0^\infty \frac{\zeta^2(\zeta+1)^2\,d\zeta}{\mathrm{R}^5},$$

l'équation (8) donne

$$2\frac{dv}{ds} = \mathrm{B}_0 t + \mathrm{B}_1 t\left(t - \frac{s}{2}\right) \tag{16}$$

et, à cause de la symétrie de v en s et t, on doit avoir aussi

$$2\frac{dv}{dt} = \mathrm{B}_0 s + \mathrm{B}_1 s\left(s - \frac{t}{2}\right). \tag{16'}$$

Le coefficient B_1 est évidemment positif; il en est de même de B_0, car, en faisant la différence entre l'expression de $4\mathrm{B}_0$ et le second membre de l'équation (13), on trouve

$$4\mathrm{B}_0 = \int_0^\infty \frac{\zeta^2(\zeta+1)}{\mathrm{R}^5}\left(1 - s - t + st\zeta^2\right)d\zeta,$$

valeur qui est essentiellement positive.

Au moyen des équations (12), (12'), (16), (16'), on trouve, sans difficulté,

$$\begin{aligned}
&\frac{dv}{ds}\,\frac{d\mathrm{F}}{dt} - \frac{dv}{dt}\,\frac{d\mathrm{F}}{ds}\\
&\quad = \frac{(s-t)}{2}\left[\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 + (s+t)\,\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1 + \tfrac{3}{2}st\,\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\right]\\
&\quad = \frac{(s-t)}{2}\left[\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 + \frac{st}{2}\,\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1 + \frac{st}{2}\,\mathrm{B}_1(2\mathrm{A}_0 + 3\mathrm{A}_1) + \left(s + t - \frac{3st}{2}\right)\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1\right],
\end{aligned}$$

valeur qui est positive, puisque celles de A_0, $2\mathrm{A}_0 + 3\mathrm{A}_1$, B_0, B_1, $(s-t)$

le sont et que l'on a aussi

$$s+t-\frac{3st}{2}=s\left(1-\frac{3t}{4}\right)+t\left(1-\frac{3s}{4}\right)>0.$$

Il résulte de là, en se reportant à la formule (15) et en se rappelant que $\frac{d\mathrm{F}}{ds}$ est négatif, que $d\varphi$ et dt sont de même signe et que, lorsque l'on fait varier t depuis zéro jusqu'à τ, φ croît et atteint son maximum φ' lorsque l'on a $t=s=\tau$.

Comme on a $st+1>1$, $\mathrm{R}>\sqrt{\zeta(\zeta+1)\zeta t}$, on déduit de la formule (8)

$$\varphi<\tfrac{1}{2}s\sqrt{t}\int_0^\infty\frac{d\zeta}{(s\zeta+1)^{\frac{3}{2}}}<\sqrt{t};$$

le troisième membre de cette inégalité s'évanouissant avec t, on voit que, à chaque valeur de φ comprise entre 0 et φ', répond un seul couple de valeurs réelles de s et t, et tous les ellipsoïdes obtenus de cette manière sont différents; pour $\varphi>\varphi'$, l'ellipsoïde à trois axes inégaux ne peut plus être une surface d'équilibre.

A mesure que φ augmente et que s et t se rapprochent de τ, la forme des ellipsoïdes tend de plus en plus vers celle de l'un des ellipsoïdes de révolution dont nous nous sommes occupé plus haut, et elle l'atteint lorsque $\varphi=\varphi'$.

Discussion relative au moment de rotation. — L'équation donne (9)

$$dq=\frac{(s+t)^2}{2(st)^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{d\varphi}{ds}\,ds+\frac{d\varphi}{dt}\,dt\right)+\frac{\varphi(s+t)}{3(st)^{\frac{1}{3}}}[(st-2t^2)\,ds+(st-2s^2)\,dt],$$

et, en éliminant ds au moyen de l'équation

$$\frac{d\mathrm{F}}{ds}\,ds+\frac{d\mathrm{F}}{dt}\,dt=0,$$

il vient

$$dq=\frac{(s+t)^2\,dt}{(st)^{\frac{4}{3}}\dfrac{d\mathrm{F}}{ds}}\left\{\left[\frac{d\varphi}{dt}+\frac{2t-4s}{3t(s+t)}\varphi\right]\frac{d\mathrm{F}}{ds}-\left[\frac{d\varphi}{ds}+\frac{2s-4t}{3s(s+t)}\varphi\right]\frac{d\mathrm{F}}{dt}\right\}.$$

Si l'on remplace φ, $\frac{d\varphi}{ds}$, $\frac{d\mathrm{F}}{dt}$ par leurs valeurs, que fournissent les équations (8) et (10), on trouvera l'expression de

$$\left[\frac{d\varphi}{dt}+\frac{2s-4t}{3t(s+t)}\varphi\right]\frac{d\mathrm{F}}{dt},$$

et une simple permutation de lettres donnera celle de

$$\left[\frac{d\varphi}{ds}+\frac{2t-4s}{3t(s+t)}\right]\frac{d\mathrm{F}}{ds}.$$

En posant

$$\mathrm{C}_0=\frac{\mathrm{A}_0}{3}+2\mathrm{A}_1\frac{st}{s+t}=\tfrac{2}{3}(2\mathrm{A}_0+3\mathrm{A}_1)\frac{st}{s+t}+\frac{\mathrm{A}_0}{3}\frac{(3+t-4st)}{s+t},$$

$$\mathrm{C}_1=\frac{\mathrm{A}_0}{3}(s+t)+\frac{\mathrm{A}_1}{2}st=(\mathrm{A}_0+\mathrm{C}_0)\frac{s+t}{4},$$

$$\mathrm{C}_2=\left(\tfrac{11}{6}\mathrm{A}_0+2\mathrm{A}_1\frac{st}{s+t}\right)=(\tfrac{3}{2}\mathrm{A}_0+\mathrm{C}_0)st,$$

il vient

$$dq=\frac{1}{4}\frac{(s+t)^2dt}{(st)^{\frac{4}{3}}\dfrac{d\mathrm{F}}{ds}}(s-t)\int_0^\infty\frac{\zeta(\zeta+1)^2}{\mathrm{R}^5}(\mathrm{C}_0+\mathrm{C}_1\zeta+\mathrm{C}_2\zeta^2)\,d\zeta.$$

De ce que $s+t<1$, on a

$$s+t-4st>(s+t)^2-4st=(s-t)^2>0,$$

d'où il suit que C_0 est positif et, comme conséquence, qu'il en est de même de C_1, C_2.

Comme $\frac{d\mathrm{F}}{ds}$ est négatif, on voit que, lorsque t croîtra depuis zéro jusqu'à τ, la quantité q ira en décroissant et atteindra sa plus petite valeur q' lorsque l'on aura $s=t=\tau$, c'est-à-dire lorsque l'ellipsoïde sera de révolution. Pour $s=1$, $t=0$, l'équation (9) donne $q=\infty$. Ainsi q prend toutes les valeurs comprises entre zéro et l'infini lorsque t varie de τ à zéro et s de τ à 1. Donc à chaque valeur de q supérieure à q' répond un seul ellipsoïde d'équilibre à trois axes inégaux; mais, pour $q<q'$, l'ellipsoïde de révolution est seul possible.

Supposons que les valeurs s et t qui conviennent à l'équilibre soient

connues, et proposons-nous de déterminer celles des demi-axes de l'ellipsoïde, nous avons

$$b = \frac{c}{\sqrt{s}}, \quad a = \frac{c}{\sqrt{t}},$$

$$\mathrm{M} = \tfrac{4}{3}\pi\rho abc;$$

d'où

$$c = \left(\frac{3\mathrm{M}}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}} (st)^{\frac{1}{6}}.$$

De l'équation

$$\frac{d\mathrm{F}}{ds}\,ds + \frac{d\mathrm{F}}{dt}\,dt = 0,$$

en ayant égard aux formules (12) et (12′), on tire

$$ds = -\frac{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 s}{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t}\,dt,$$

d'où

$$d(st) = s\,dt + t\,ds = \frac{\mathrm{A}_0 (s-t)\,dt}{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t}.$$

Comme les quantités

$$(s-t), \quad \mathrm{A}_0, \quad \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t = -\frac{d\mathrm{F}}{ds}$$

sont positives, le produit st croît avec t; d'où il suit que *le plus petit axe c atteint son maximum quand l'ellipsoïde est de révolution.*

Pour trouver le maximum de ν ou de n, il suffit de supposer $\lambda = \lambda'$ dans les formules (4) et (5′) du n° 90; on arrive ainsi à

$$0 = -\lambda(3 + 13\lambda^2) + (3 + 14\lambda^2 + 3\lambda^4)\operatorname{arc\,tang}\lambda,$$

$$\frac{n^2}{4\pi\rho} = \frac{\lambda(3+\lambda^2) - (3-\lambda^2)(1+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda}{4\lambda^5},$$

d'où

$$\lambda = 1,3946, \quad \frac{n^2}{4\pi\rho} = 0,09356;$$

par suite,

$$\tau = 0,3395,$$

tandis que, pour l'ellipsoïde de révolution, nous avons trouvé les limites

$$\lambda = 2,5293, \quad \frac{n^2}{4\pi\rho} = 0,1123.$$

Supposons que les conditions du mouvement soient celles de la Terre; soient

ρ sa densité moyenne;
R son rayon moyen;
g l'accélération de la gravité à sa surface.

Nous avons

$$g = \tfrac{4}{3}\pi\rho R,$$

et le rapport

$$\frac{n^2}{4\pi\rho} = \frac{1}{3}\frac{n^2 R}{g},$$

qui est celui du tiers de l'accélération centrifuge à l'équateur à celle de la gravité, a pour valeur 0,0014986. Les équations (4) et (5′) feront connaître les valeurs de s et de t, et l'on trouve

$$\frac{b}{c} = 1,018, \quad \frac{a}{c} = 19,57.$$

Pour les deux ellipsoïdes de révolution, on a respectivement

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = 1,0043441, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = 680.$$

On voit donc que l'ellipsoïde à trois axes inégaux est trop différent d'une sphère pour que l'on puisse admettre que la Terre en affecte la forme, ce qui est d'accord avec ce que nous avons dit plus haut d'une manière générale.

On remarquera que, si la vitesse angulaire diminue de plus en plus, le petit axe de l'équateur diffère de moins en moins de l'axe des pôles, tandis que le grand axe va en augmentant. Si donc cette vitesse est extrêmement faible, la masse fluide affecte la forme d'une longue aiguille à peu près ronde, tandis que les deux ellipsoïdes de révolution étudiés en premier lieu se réduisent : l'un à une sphère, l'autre à un disque elliptique très aplati.

En résumé, on voit que, quand $\frac{n^2}{4\pi\rho}$ est inférieur à 0,09356, la surface d'équilibre peut être celle de l'un ou l'autre des ellipsoïdes de révolution aplatis ou d'un ellipsoïde à trois axes inégaux; lorsque $\frac{n^2}{4\pi\rho}$

atteint cette limite, le dernier ellipsoïde se confond avec l'un des précédents; pour les valeurs de $\frac{n^2}{4\pi\rho}$ comprises entre 0,09356 et 0,1123, les ellipsoïdes de révolution subsistent seuls et se confondent pour la seconde de ces limites; pour une valeur de $\frac{n^2}{4\pi\rho}$ supérieure à 0,1123, la forme ellipsoïdale ne peut plus être une surface d'équilibre.

Enfin, pour des conditions initiales données du mouvement, il existe toujours un ellipsoïde de révolution satisfaisant à l'équilibre, et il n'y en a qu'un seul; si le moment de rotation ne dépasse pas une certaine limite, la surface d'équilibre peut être un ellipsoïde à trois axes inégaux; au delà, cette forme est impossible.

§ III. — De la figure d'équilibre d'une masse fluide peu différente d'une sphère pouvant recouvrir un sphéroïde.

97. Les résultats auxquels nous sommes parvenu au paragraphe précédent ne peuvent être considérés que comme donnant un premier aperçu sur la forme des corps célestes, car il est à peu près certain que ces corps ne sont pas homogènes et que la densité va en augmentant lorsque l'on se dirige de la surface vers le centre. Le problème, considéré dans sa généralité, présente de grandes difficultés, que Laplace n'est parvenu à surmonter que dans le cas de la nature, celui d'un sphéroïde peu différent de la sphère.

Mais, avant d'aborder cette question, il convient d'établir que la figure d'équilibre d'une masse fluide homogène, animée d'un mouvement uniforme de rotation, est unique lorsque cette figure diffère peu d'une sphère.

98. **Figure d'équilibre d'une masse fluide homogène, peu différente d'une sphère, animée d'un mouvement uniforme de rotation.** — Continuons à désigner par n la vitesse angulaire de la masse et négligeons le produit, nécessairement très petit, de sa seconde puissance par la différence entre la sphère et le sphéroïde. On a, pour le travail de la force centrifuge d'un point de la surface, dont la masse est censée égale à l'unité, en conservant les notations du § IV

du Chap. III,

$$\frac{n^2 A^2 \sin^2\theta}{2} = \frac{n^2 A^2}{3} - \frac{n^2 A^2}{2}\left(\mu^2 - \tfrac{1}{3}\right),$$

expression (n^{os} 77 et 85) dont le second terme n'est autre chose qu'une forme particulière des fonctions Y_2 ou Z_2. En remplacant a par $A(1+z)$ dans le second membre de la formule (15) du n° 80, négligeant le produit zZ_ν, puis ajoutant le résultat obtenu à l'expression précédente pour égaler le tout à une constante C, on obtient, pour l'équation de la surface d'équilibre,

$$(1) \qquad \tfrac{4}{3}\pi A^2(1-z) + 4\pi A^2 \sum \frac{Z_\nu}{2\nu+1} + \frac{n^2 A^2}{3\rho} - \frac{n^2 A^2}{2\rho}\left(\mu^2 - \tfrac{1}{3}\right) - C = 0.$$

En remplaçant dans cette équation z par son développement ΣZ_ν et égalant à zéro les coefficients des fonctions sphériques du même ordre, on trouve

$$\tfrac{4}{3}\pi A^2(1-Z_0) + 4\pi A^2 Z_0 + \frac{1}{3\rho} n^2 A^2 = C,$$

$$Z_2 = -\frac{15}{16}\frac{n^2}{\pi\rho}\left(\mu^2 - \tfrac{1}{3}\right).$$

La fonction Z_1 reste indéterminée; mais, en se reportant au n° 82, on peut la supposer nulle, ainsi que Z_0. Pour $\nu > 2$, on a $Z_\nu = 0$.

En posant

$$\varphi = \frac{n^2}{\frac{4}{3}\pi\rho},$$

quantité qui est sensiblement égale au rapport, à la pesanteur, de la force centrifuge à l'équateur, il vient

$$a = A(1+Z_2) = A\left[1 - \tfrac{5}{4}\varphi\left(\mu^2 - \tfrac{1}{3}\right)\right],$$

ce qui n'est autre chose que *l'équation polaire d'un ellipsoïde de révolution aplati et dont l'aplatissement est mesuré par* $\frac{5}{4}\varphi$, résultat conforme à celui que nous avons obtenu au n° 92.

L'attraction exercée par un sphéroïde homogène peu différent d'une sphère sur un point de sa surface ne donnera, perpendiculairement au rayon, qu'une composante du même ordre de grandeur que l'aplatissement et dont le carré est négligeable; on peut, par suite, considérer l'attraction totale comme étant égale à sa composante suivant le rayon.

La formule (15) du n° 80 donne, pour cette composante, en supposant $a = A(1 + Z_2)$ après la différentiation par rapport à a,

$$-\frac{dV}{da} = \tfrac{4}{3}\pi\rho A\left(1 - \frac{Z_2}{5}\right) = \tfrac{4}{3}\pi\rho A\left[1 + \frac{\varphi}{4}(\mu^2 - \tfrac{1}{3})\right].$$

Si l'on en retranche la composante semblable,

$$n^2 A \sin^2\theta = \tfrac{4}{3}\pi\rho A\varphi(1 - \mu^2),$$

de la force centrifuge, on obtient, pour la pesanteur à la surface,

$$g = \tfrac{4}{3}\pi\rho A(1 - \tfrac{13}{12}\varphi + \tfrac{5}{4}\varphi\mu^2),$$

et cette accélération varie proportionnellement au carré du cosinus de la latitude, ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé au n° 95.

Si la Terre était homogène dans toutes ses parties, la variation relative que la pesanteur éprouverait en allant de l'équateur au pôle serait, à peu de chose près,

$$\tfrac{5}{4}\varphi = 0,004325,$$

tandis que les expériences faites sur le pendule ont donné 0,0054. L'homogénéité n'est donc pas admissible, et nous sommes conduit à reprendre la question, comme nous le ferons plus loin, en considérant la Terre comme ayant été formée, à l'origine, par un fluide hétérogène.

99. **Si une masse fluide homogène, animée d'un mouvement de rotation uniforme, est sollicitée par des forces extérieures très petites, indépendantes de la forme d'équilibre; si, de plus, cette forme est peu différente d'une sphère, elle est unique.** — Ce cas est celui d'un corps céleste, en tenant compte des actions exercées sur lui par les autres astres, lesquelles peuvent être considérées comme équivalentes sur la surface d'équilibre et sur la surface de la sphère dont elle diffère peu.

En représentant par $4\pi A^2\rho N$ la portion du potentiel V qui correspond à ces forces et à la force centrifuge, nous aurons, au lieu de l'équation (1) du numéro précédent,

$$(a) \qquad \tfrac{1}{3}(1 - z) + \sum \frac{Z_\nu}{2\nu + 1} + N = \text{const.}$$

Supposons que z et Z_ν se rapportent à une figure d'équilibre et qu'il

y ait une seconde figure ayant pour rayon vecteur $A(1+z+w)$; si ΣW_ν est la suite de fonctions sphériques qui représente w, nous aurons, pour cette seconde figure,

$$\tfrac{1}{3}(1-z-w)+\sum\frac{Z_\nu+W_\nu}{2\nu+1}+N=\text{const.},$$

d'où, par différence,

$$(b)\qquad -\tfrac{1}{3}\sum W_\nu+\sum\frac{W_\nu}{2\nu+1}=\text{const.}$$

En identifiant les fonctions, on voit que $W_\nu=0$ pour $\nu\geq 2$; W_0 est nul (n° 82) comme Z_0 par suite de l'équivalence des volumes compris sous les deux surfaces d'équilibre et de celui de la sphère. Les termes en Z_1 et W_1 disparaissant des équations (a) et (b), la fonction N ne doit pas renfermer de termes de cette nature. Si l'on prend pour origine le centre de gravité de la masse, on aura $Z_1=0$, $Z_1+W_1=0$, et les rayons vecteurs des deux surfaces se réduisant à $\sum_{\nu=2}Z_1$ sont, par suite, identiques : c'est ce qu'il s'agissait d'établir.

100. Surface d'équilibre d'une couche fluide homogène, peu différente d'une sphère, recouvrant un noyau sphérique homogène. — Soient ρ' la densité et c le rayon du noyau; l'excès du potentiel de son attraction sur un point extérieur sur ce qu'il serait si la sphère était formée par le liquide étant $\frac{4}{3}\pi c^3\left(\frac{\rho'-\rho}{a}\right)$, on est ramené au cas d'une masse fluide homogène, en introduisant cette expression divisée par $4\pi A^2$ dans l'équation (a) du numéro précédent, après y avoir remplacé a par $A(1+z)$; on obtient ainsi

$$\tfrac{1}{3}\left[1+\frac{c^3}{A^3}(\rho'-\rho)\right]-\frac{z}{3}\left[1+\frac{c^3}{A^3}(\rho'-\rho)\right]+\sum\frac{Z_\nu}{2\nu+1}+N=\text{const.};$$

la fonction Z_1 ne disparaît pas de cette équation et sera indéterminée ou nulle.

Soit $A(1+z+w)$ le rayon vecteur d'une seconde surface d'équilibre si elle existe; on a, au lieu de la formule (b) du numéro précédent,

$$-\tfrac{1}{3}\left[1+\frac{c^3}{A^3}(\rho'-\rho)\right]\sum W_\nu+\sum\frac{W_\nu}{2\nu+1}=\text{const.};$$

on pourra supposer, comme ci-dessus, $W_0 = 0$, et la constante de cette équation sera nulle.

Si l'on ne peut pas satisfaire à la relation

$$\frac{1}{3}\left[1 + \frac{C^3}{A^3}(\rho' - \rho)\right] = \frac{1}{2\nu + 1}$$

pour une valeur entière de ν, toutes les fonctions W_ν seront nulles, et il n'y aura qu'une seule surface d'équilibre. Dans le cas contraire, ϖ se réduira à la fonction W_ν et il y aura une infinité de surfaces d'équilibre, puisque cette fonction renferme $2\nu + 1$ constantes indéterminées.

101. Formules générales relatives à l'équilibre d'une masse fluide hétérogène, à peu près sphérique, pouvant recouvrir un noyau sphérique. — Soient

M la masse totale ;

O son centre de gravité, pris pour origine des coordonnées lorsque le fluide a atteint sa forme d'équilibre ;

n la vitesse angulaire constante de M autour de Oz ;

a, θ, ϖ les coordonnées polaires d'un point m de M ;

M′, M″, ... les masses de corps célestes exerçant leurs attractions sur m, et qui, comme nous le savons, peuvent être considérées comme étant concentrées en leurs centres de gravité respectifs.

Les éléments matériels de M se meuvent dans l'espace en vertu d'une vitesse translatoire dont on peut faire abstraction, et de leurs accélérations, parmi lesquelles nous distinguerons d'abord celles qui sont dues aux attractions de M′, M″, ... L'accélération du point O est la résultante de $\frac{M'}{OM'^2}$, $\frac{M''}{OM''^2}$, ...; mais, dans la question dont il s'agit, nous devons considérer O comme étant en repos relatif, ce qui revient à introduire dans le mouvement de m des accélérations égales et contraires aux précédentes.

Nous sommes ainsi conduit à étudier en particulier l'effet produit sur m par l'un M′ des corps célestes.

Nous supposerons que m appartient au fluide, et nous désignerons par a', θ', ϖ' les coordonnées polaires de M′.

Le potentiel de l'attraction de M′ sur le point matériel m, ramené à l'unité de masse, est, en se reportant au n° 73,

$$\frac{M'}{\sqrt{a^2 - 2aa'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi - \varpi')] + a'^2}} = \frac{M'}{a'}\sum_0^\infty P_\nu\left(\frac{a}{a'}\right)^\nu.$$

Désignant par I la projection de m sur OM′, l'accélération $-\frac{M'}{a'^2}$, égale et contraire à celle de O que m est censé posséder, dérive du potentiel

$$-\frac{M'}{a'^2}\times OI = -\frac{M'}{a'^2}\,a\cos\widehat{M'Om} = -\frac{M'}{a'^2}\,aP_1;$$

d'où résulte que le potentiel dû à l'action de M′ sur m se réduit à

$$\frac{M'}{a'}\left[\sum_0^\infty P_\nu\left(\frac{a}{a'}\right)^\nu - \frac{aP_1}{a'}\right] = \frac{M'}{a'}P_0 + \sum_2^\infty P_\nu\left(\frac{a}{a'}\right)^\nu$$

ou, en ne considérant que les termes dépendant de la position de m,

$$\frac{M'}{a'}\sum_2^\infty P_\nu\left(\frac{a}{a'}\right)^\nu.$$

Nous représenterons par

$$\sum\frac{M'}{a'}\sum_2^\infty P_\nu\left(\frac{a}{a'}\right)$$

le potentiel qui se rapporte à toutes les masses M′, M″, ... Ce potentiel se réduit, à très peu près, à

$$(a)\qquad \sum\frac{M'}{a'}\sum_2^\infty P_\nu\left(\frac{A}{a'}\right)^\nu,$$

A étant le rayon de la sphère de comparaison de la couche du sphéroïde sur laquelle se trouve le point attiré.

Le potentiel qui se rapporte aux attractions des éléments matériels du sphéroïde sur m est donné par la formule (25) du n° 85, qui donne, en remplaçant a par $A(1+z) = A(1+\Sigma Z_\nu)$ dans son premier terme,

et a par A dans les deux autres,

$$(b)\qquad \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3\mathrm{A}}(1-\Sigma Z_\nu)\displaystyle\int_0^{a}\rho\, d\mathrm{A}^3+4\pi\sum\frac{1}{(2\nu+1)\mathrm{A}^{\nu+1}}\int_0^{\mathrm{A}}\rho\, d(\mathrm{A}^{\nu+3}Z_\nu) \\ \qquad\qquad +4\pi\displaystyle\sum\frac{\mathrm{A}^\nu}{2\nu+1}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}_1}\rho\, d(\mathrm{A}^{2-\nu}Z_\nu). \end{cases}$$

Enfin nous avons vu que le potentiel de la force centrifuge a pour expression

$$(c)\qquad \frac{n^2\mathrm{A}^2}{3}-\frac{n^2\mathrm{A}^2}{2}\left(\mu^2-\tfrac{1}{3}\right).$$

En égalant la somme des expressions (a), (b), (c) à une constante arbitraire C, nous aurons, pour l'équation générale des surfaces de niveau exprimée au moyen des coordonnées $a=\mathrm{A}(1+\Sigma Z_\nu)$, ϖ, θ,

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{C}=\dfrac{4\pi}{3\mathrm{A}}(1-\Sigma Z_\nu)\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}}\rho\, d\mathrm{A}^3+4\pi\sum\frac{1}{(2\nu+1)\mathrm{A}^{\nu+1}}\int_0^{\mathrm{A}}\rho\, d(\mathrm{A}^{\nu+3}Z_\nu) \\ \quad +4\pi\displaystyle\sum\frac{\mathrm{A}^\nu}{2\nu+1}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}_1}\rho\, d(\mathrm{A}^{2-\nu}Z_\nu)+\frac{n^2\mathrm{A}^2}{3}-\frac{n^2\mathrm{A}^2}{2}\left(\mu^2-\tfrac{1}{3}\right)+\sum\frac{\mathrm{M}'}{a'}\left(\frac{\mathrm{A}}{a'}\right)^\nu. \end{cases}$$

Posons

$$\mathrm{U}_0=\frac{n^2}{3},$$

$$\mathrm{U}_1=0,$$

$$\mathrm{U}_2=-\frac{n^2\mathrm{A}^2}{2}\left(\mu^2-\tfrac{1}{3}\right)+\sum\frac{\mathrm{M}'}{a'^3},$$

et, pour $\nu>2$,

$$\mathrm{U}_\nu=\sum\frac{\mathrm{M}'}{a'^{\nu+1}},$$

les quantités U_ν étant des fonctions sphériques de l'ordre ν indépendantes de A. En identifiant les fonctions semblables contenues dans l'équation (1), on obtient d'abord

$$(2)\qquad \frac{4\pi}{3\mathrm{A}}\int_0^{\mathrm{A}}\rho\, d\mathrm{A}^3+\frac{4\pi}{\mathrm{A}}\int_0^{\mathrm{A}}\rho\, d(\mathrm{A}^3Z_0)+4\pi\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}_1}\rho\, d(\mathrm{A}^2Z_0)+\mathrm{A}^2\mathrm{U}_0=\mathrm{C}$$

et, lorsque $\nu > 0$,

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} &-\frac{4\pi Z_\nu}{3A}\int_0^A \rho\, dA^3 + \frac{4\pi}{(2\nu+1)A^{\nu+1}}\int_0^A \rho\, d(A^{\nu+3}Z_\nu) \\ &\qquad + \frac{4\pi A^\nu}{2\nu+1}\int_A^{A_1} \rho\, d(A^{2-\nu}Z_\nu) + A^\nu U_\nu = 0. \end{aligned} \right.$$

On pourra choisir à volonté la constante Z_0, qui entre dans l'équation (2). En considérant maintenant l'équation (3) et posant

$$\frac{4\pi}{2\nu+1}\int_0^{A_1} \rho\, d(A^{2-\nu}Z_\nu) + U_\nu = \frac{4\pi U'_\nu}{2\nu+1},$$

ce qui est une fonction sphérique indépendante de A, il vient

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} &-(4\nu+1)A^\nu Z_\nu \int_0^A \rho\, dA^3 + 3\int_0^A \rho\, d(A^{\nu+3}Z_\nu) \\ &\qquad - 3A^{2\nu+1}\int_0^A \rho\, d(A^{2-\nu}Z_\nu) + 3A^{2\nu+1}U'_\nu = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on différentie deux fois de suite cette dernière équation par rapport à A et que l'on élimine entre les résultats obtenus l'intégrale

$$\int_0^A \rho\, d(A^{2-\nu}Z_\nu),$$

la fonction U'_ν disparaît, et l'on trouve

$$(5)\qquad \frac{d^2Z_\nu}{d^2A} = \left[\frac{\nu(\nu+1)}{A^2} - \frac{6\rho A}{\int_0^A \rho\, dA^3}\right] Z_\nu - \frac{6\rho A^2}{\int_0^A \rho\, dA^3}\,\frac{dZ_\nu}{dA}.$$

L'intégration de l'équation (5) introduira deux fonctions sphériques dépendant uniquement de ϖ et de μ; une première relation entre ces fonctions résultera de l'équation (4); si le fluide recouvre un noyau solide, la seconde relation s'obtiendra en exprimant que Z_ν a la même valeur pour la dernière couche intérieure du fluide que pour la surface donnée du noyau; les deux fonctions dont il s'agit seront ainsi déterminées. Mais, lorsque le sphéroïde est entièrement fluide, il semblerait au premier abord que le problème est indéterminé et que, par

suite, il peut avoir une infinité de formes d'équilibre. Nous allons maintenant étudier ce cas, qui est d'autant plus intéressant qu'il paraît se rapporter aux conditions primitives des corps célestes.

102. Figure d'équilibre d'une masse fluide hétérogène dont les couches de niveau sont peu différentes de la sphère. — En se reportant à l'explication relative à l'arrangement des fluides pesants hétérogènes, on est naturellement conduit à admettre que la densité de la masse fluide considérée va en augmentant à mesure que l'on s'approche du centre.

Si la masse était homogène, le rapport

$$\frac{\rho A^3}{\int_0^A \rho\, dA^3}$$

serait égal à l'unité. En partant de là, nous poserons

$$\frac{\rho A^3}{\int_0^A \rho\, dA^3} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\rho A^3}\int_0^A A^3\, d\rho} = 1 - F(A),$$

en désignant par $F(A)$ une certaine fonction qui est nulle pour $A = 0$, puisque le noyau infiniment petit que l'on peut concevoir au centre doit être considéré comme homogène : la valeur de cette fonction est inférieure à l'unité et de plus essentiellement positive; car, ρ allant en décroissant quand A augmente, le second membre de la double égalité ci-dessus est plus petit que l'unité.

En mettant l'équation (5) sous la forme

$$(5') \qquad \frac{d^2 Z_\nu}{dA^2} = \frac{1}{A^2}\left\{\nu(\nu+1) - 6[1 - F(A)]\right\} Z_\nu - \frac{6[1 - F(A)]}{A}\frac{dZ_\nu}{dA},$$

on voit que Z_ν est de la forme

$$(d) \qquad Z_\nu = h_\nu X_\nu,$$

X_ν étant une fonction sphérique de l'ordre ν en ϖ et μ indépendante de A et h_ν étant uniquement fonction de A.

Par la substitution de l'expression (a) dans l'équation $(5')$, on trouve

$$(6) \qquad \frac{d^2 h_\nu}{d^2 \mathrm{A}} = \frac{1}{\mathrm{A}^2}\left\{\nu(\nu+1) - 6[1-\mathrm{F}(\mathrm{A})]\right\} h_\nu - \frac{6[1-\mathrm{F}(\mathrm{A})]}{\mathrm{A}} \frac{dh_\nu}{d\mathrm{A}}.$$

Concevons que h_ν soit développé en une suite de termes ordonnés suivant les puissances ascendantes entières ou fractionnaires de A, et soit

$$h_\nu = \alpha_\nu \mathrm{A}^s + \alpha'_\nu \mathrm{A}^{s'} + \ldots$$

ce développement. En le substituant dans l'équation (6), on trouve

$$(7) \quad \begin{cases} (s+\nu+3)(s-\nu+2)\alpha_\nu \mathrm{A}^{s-2} + (s'+\nu+3)(s'-\nu+2)\alpha'_\nu \mathrm{A}^{s'-2} + \ldots \\ \quad = 6\mathrm{F}(\mathrm{A})[(s+1)\alpha_\nu \mathrm{A}^{s-2} + (s'+1)\alpha'_\nu \mathrm{A}^{s'-2} + \ldots]. \end{cases}$$

Si l'on conçoit que $\mathrm{F}(\mathrm{A})$ soit développé de la même manière que h_ν, ce nouveau développement ne pouvant pas renfermer de terme indépendant de A, puisque $\mathrm{F}(0) = 0$, il faut, pour que l'on puisse identifier les deux membres de l'équation (7), que l'un des termes du premier membre soit nul et que, par exemple, on ait

$$(s+\nu+3)(s-\nu+2) = 0,$$

d'où deux valeurs pour s. Pour chacune de ces valeurs, on identifiera les autres termes du premier membre avec ceux du second, et l'on obtiendra ainsi deux séries dont la somme, après qu'elles auront été multipliées chacune par une constante arbitraire, sera l'intégrale complète de l'équation (6). Mais, dans la question dont il s'agit, on doit rejeter la valeur $s = -(\nu+3)$, pour laquelle la fonction Z_ν serait infinie au centre, et l'on ne peut, par suite, admettre que la série

$$h_\nu = \alpha_\nu \mathrm{A}^{\nu-2} + \alpha'_\nu \mathrm{A}^{s'} + \ldots.$$

Pour $\nu = 1$, l'équation (6) est satisfaite par

$$h_1 = \frac{\alpha_1}{\mathrm{A}}.$$

Mais, comme l'origine est au centre de gravité du sphéroïde, on a (n° 82)

$$Z_1 = \frac{\alpha_1}{\mathrm{A}} X_1 = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha_1 = 0.$$

A l'inspection de l'équation (7) on reconnaît que les coefficients α'_ν, α''_ν, ... se composent chacun de deux facteurs, l'un α_ν, l'autre indépendant du précédent. Mais on peut supposer le premier de ces facteurs égal à l'unité, puisque cela revient à le comprendre dans X_ν.

Si, lorsque ν est au moins égal à 2, la quantité h_ν commence à croître avec Δ à partir de $\Delta = 0$, elle ne cessera pas de croître avec cette variable, car autrement $\frac{dh_\nu}{d\Delta}$ décroîtrait ou deviendrait négatif, ce qui est incompatible avec l'équation (6), puisque $\nu(\nu+1) > 1 - F(\Delta)$ et que $\frac{d^2 h_\nu}{d\Delta^2}$ serait essentiellement positif.

On pourra satisfaire à la condition que la fonction $F(\Delta)$ soit très petite pour de très petites valeurs de Δ, en posant

$$F(\Delta) = \beta \Delta^\lambda,$$

β et λ étant des nombres positifs entiers ou fractionnaires. L'équation (7), après y avoir fait $s = \nu - 2$, $\alpha_\nu = 1$ devient, par la substitution de cette valeur,

$$\begin{aligned}&(s'+\nu+3)(s'-\nu+2)\alpha'_\nu \Delta^{s'-2} + (s''+\nu+3)(s''-\nu+2)\alpha''_\nu \Delta^{s''-2} + \dots \\ &\quad = 6\beta(\nu-1)\Delta^{\lambda+\nu-4} + 6\beta(s'+1)\alpha'_\nu \Delta^{\lambda+s'-2},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} s' - 2 &= \lambda + \nu - 4, \\ (s'+\nu+3)(s'-\nu+2)\alpha'_\nu &= 6\beta(\nu-1), \\ s'' - 2 &= \lambda + s' - 2, \\ (s''+\nu+3)(s''-\nu+2)\alpha''_\nu &= 6\beta(s'+1)\alpha'_\nu, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} s' &= \nu + \lambda - 2, \\ \alpha'_\nu &= \frac{6\beta(\nu-1)}{\lambda(2\nu+\lambda+1)}; \\ s'' &= \nu + 2\lambda - 2, \\ \alpha''_\nu &= \left(\frac{6\beta}{\lambda}\right)^2 \frac{(\nu-1)(\nu+\lambda-1)}{2(3\nu+2\lambda+1)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

par suite,

$$h_\nu = A^{\nu-2} + \frac{6\beta}{\lambda}\frac{\nu-1}{(2\nu+\lambda+1)}A^{\nu+\lambda-2} + \left(\frac{6\beta}{\lambda}\right)^2\frac{(\nu-1)(\nu+\lambda-1)}{2(3\nu+2\lambda+1)}A^{\nu+2\lambda-2} + \ldots,$$

$$\frac{dh_\nu}{dA} = (\nu-2)A^{\nu-2} + \frac{6\beta(\nu-1)(\nu+\lambda-2)}{\lambda(2\nu+\lambda+1)}A^{\nu+\lambda-3} + \left(\frac{6\beta}{\lambda}\right)^2\frac{(\nu-1)(\nu+\lambda-1)(\nu+2\lambda-2)}{2(3\nu+2\lambda+1)}A^{\nu+2\lambda-3} + \ldots,$$

et ces deux quantités sont essentiellement positives quand ν est égal ou supérieur à 2.

Lorsque ν est égal ou supérieur à 3, la valeur de U_ν est insensible pour la Terre, la Lune, Jupiter, etc., et l'équation (3), en y remplaçant Z_ν par $h_\nu X_\nu$, se réduit à

$$\left[3A^{2\nu+1}\int_A^{A_1}\rho\, d(A^{2-\nu}h_\nu) - (2\nu+1)A^\nu h_\nu\int_0^A \rho\, dA^3 + 3\int_0^A \rho\, d(A^{\nu+3}h_\nu)\right]X_\nu = 0.$$

Si l'on désigne par H_ν ce que devient h_ν à la surface ou pour $A = A_1$, il vient

$$\left[-(2\nu+1)A_1^\nu H_\nu\int_0^{A_1}\rho\, dA^3 + 3\int_0^{A_1}\rho\, d(A^{\nu+3}h_\nu)\right]X_\nu = 0.$$

En effectuant les intégrations par parties et en groupant convenablement les termes,

$$\left\{-2(\nu-2)\rho H_\nu + \int_0^{A_1}[(2\nu+1)H_\nu - 3h_\nu]\left(\frac{A}{A_1}\right)^3 d\rho\right\}X_\nu = 0.$$

Comme, pour $\nu \geq 2$, h_ν croît avec A, on a $h_\nu < H_\nu$; d'autre part, $\frac{d\rho}{dA}$ est négatif; le coefficient de X_ν est donc essentiellement négatif, et il faut, par suite, que l'on ait $X_\nu = 0$ pour $\nu > 2$. Le rayon vecteur d'une surface de niveau se réduisant à

$$A(1 + Z_0 + Z_2),$$

il s'ensuit que *les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes*.

Pour simplifier l'écriture, nous ferons dorénavant $A_1 = 1$, ce qui re-

vient à considérer A comme représentant le rapport du rayon moyen d'une couche élémentaire à celui de la surface du sphéroïde.

Supposons qu'il s'agisse de la Terre et négligeons les attractions des astres extérieurs; nous devrons prendre simplement

$$U_2 = -\frac{n^2}{2}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}),$$

Revenons maintenant à l'équation (3), où nous ferons $\nu = 2$; supprimons l'indice devenu inutile de H_2 et h_2 et remplaçons Z_2 par $X_2 h$; nous avons

$$\left[-\tfrac{4}{3}\pi H\int_0^1 \rho\, dA^3 + \frac{4\pi}{5}\int_0^1 \rho\, d(A^5 h)\right] X_2 - \frac{n^2}{2}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) = 0.$$

Soit

$$(e) \qquad \varphi = \frac{n^2}{\tfrac{4}{3}\pi\int_0^1 \rho\, dA^3}$$

le rapport, aux termes du second ordre près, de la force centrifuge à l'équateur à la pesanteur à la surface. L'équation précédente donne

$$(f) \qquad X_2 = -\frac{\varphi(\mu^2 - \frac{1}{3})}{2H - \frac{2}{5}\dfrac{\int_0^1 \rho\, d(A^3 h)}{\int_0^1 \rho A^2 dA}}$$

ou

$$(f') \qquad X_2 = -k(\mu^2 - \tfrac{1}{3}),$$

en désignant par

$$(g) \qquad k = \frac{\varphi}{2H - \frac{2}{5}\dfrac{\int_0^1 \rho\, d(A^5 h)}{\int_0^1 \rho A^2 dA}}$$

une constante qui ne dépend que du volume et de la composition de la

masse fluide. Le rayon vecteur a de la surface de niveau, dont le rayon moyen est A, sera donc

$$a = \text{A}[1 + Z_0 - kh(\mu^2 - \tfrac{1}{3})].$$

Si nous profitons de l'indétermination de Z_0 pour établir la relation

$$Z_0 = -\tfrac{1}{3}kh,$$

il vient simplement

$$a = \text{A}(1 - kh\mu^2).$$

On voit ainsi que la surface de niveau considérée est *un ellipsoïde de révolution autour de l'axe de rotation* dont les demi-axes principaux sont A et $\text{A}(1 + kh)$, et dont kh est l'aplatissement ou, si l'on veut, l'*ellipticité*.

Nous avons fait remarquer plus haut que h croît avec A, d'où il suit que *l'aplatissement des surfaces de niveau va en croissant en allant du centre à la surface*.

L'aplatissement de la surface libre a pour expression

$$(h) \qquad E = \frac{\frac{\varphi}{1}H}{2H - \frac{6}{5}\dfrac{\int_0^1 \rho\, d(\text{A}^5 h)}{\int_0^1 \rho\, d\text{A}^3}},$$

et est supérieur à $\frac{\varphi}{2}$, puisque h croît avec A et que le dénominateur de son expression est, par suite, inférieur à $2H$.

Si nous posons

$$h = \frac{u}{\text{A}^2},$$

u croîtra avec A, et l'on aura

$$\rho \frac{d\text{A}^5 h}{d\text{A}^3} = \rho u + \rho \text{A}^3 \frac{du}{d\text{A}^3} = \rho u + \frac{du}{d\text{A}^3} f(\rho\, d\text{A}^3 + \text{A}^3 d\rho)$$

$$= \frac{d}{d\text{A}^3}(u f \rho\, d\text{A}^3) + \frac{du}{d\text{A}^3} f \text{A}^3 d\rho,$$

d'où

$$f\rho\, d(\text{A}^5 h) = u f \rho\, d\text{A}^3 + f du f \text{A}^3 d\rho.$$

Comme u augmente du centre à la surface libre, tandis que ρ dimi-

nue, la seconde intégrale de cette expression est négative, et l'on a, par suite,

$$\int \rho\, d(\mathrm{A}^5 h) < u \int \rho\, d\mathrm{A}^3,$$

et, à plus forte raison, en remplaçant u par sa plus grande valeur H correspondant à $\mathrm{A} = 1$,

$$\int \rho\, d(\mathrm{A}^5 h) < \mathrm{H} \int \rho\, d\mathrm{A}^3$$

ou

$$\frac{\int_0^1 \rho\, d\mathrm{A}^5 h}{\int_0^1 \rho\, d\mathrm{A}^3} < \mathrm{H},$$

et la formule (h) donne, par suite,

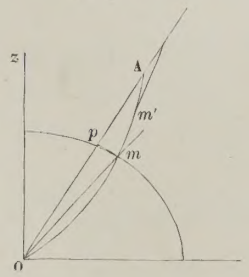
$$\mathrm{E} < \tfrac{5}{4}\varphi,$$

c'est-à-dire (n° 98) que *la limite supérieure de l'aplatissement est l'aplatissement qui correspond au cas de l'homogénéité*.

103. De la pesanteur. — Les directions successives de la pesanteur dans la masse fluide, en allant d'un point de la surface libre jusqu'au centre, sont normales aux surfaces de niveau qu'elles traversent ou, si l'on veut, sont tangentes à une trajectoire orthogonale de ces surfaces. Nous allons d'abord chercher à établir l'équation générale de ces trajectoires, dont chacune est comprise dans un plan méridien.

Soient (*fig.* 10)

Fig. 10.



A un point de la surface libre;

θ_0 l'angle que forme le rayon OA avec l'axe de rotation Oz;

mm' un élément de la trajectoire qui passe par le point A;

$a = Om$, $\theta = \widehat{mOz}$ les coordonnées polaires de m;
$u = mp$ la distance du point m à OA;
δ l'angle aigu formé par mm' avec OA;
$2A$ le grand axe de la surface de niveau passant par m.

On remarquera que les quantités $(\theta - \theta_0)$, $(A - a)$, u, δ sont de l'ordre de l'aplatissement kh, avec lequel elles sont nulles.

On a

$$-du = mm' \sin\delta = da.\delta = dA.\delta.$$

L'équation polaire de la section méridienne de la surface de niveau passant par m est, aux termes du second ordre près,

$$a = A(1 - hk\cos^2\theta),$$

et l'angle aigu que forme sa normale en m avec la direction de Om a pour expression

$$kh\sin 2\theta = kh\sin 2\theta_0.$$

Nous avons ainsi

$$\delta = kh\sin 2\theta_0 - (\theta - \theta_0);$$

par suite,

$$-du = [kh\sin 2\theta_0 - (\theta - \theta_0)]\,dA.$$

D'autre part, on a

$$u = a\sin\widehat{mOA} = A(\theta - \theta_0),$$

et l'équation précédente devient

$$\frac{du}{dA} - \frac{u}{A} + k\sin 2\theta_0.h = 0.$$

On déduit de là, en remarquant que, pour $A = 1$, on a $u = 0$,

$$(i) \qquad u = Ak\sin 2\theta_0 \int_A^1 \frac{h}{A}\,dA,$$

équation qui permettra de construire la trajectoire, lorsque l'on connaîtra h en fonction de A.

La composante, suivant mO, de l'attraction sur m s'obtiendra en

changeant de signe l'expression (26) du n° 85, puis en y faisant $\nu = 0$, $\nu = 2$, en se rappelant que $Z_1 = 0$; on a ainsi, en continuant à poser $A_1 = 1$,

$$(j)\qquad \begin{cases} -\dfrac{dV}{da} = \dfrac{4\pi}{3A^2}(1 - 2Z_0 - 2Z_2)\displaystyle\int_0^A \rho\, dA^3 + \dfrac{4\pi}{A^2}\int_0^A \rho\, d(A^3 Z_0) \\ \qquad + \dfrac{12}{5}\dfrac{\pi}{A^3}\displaystyle\int_0^A \rho\, d(A^5 Z_2) - \dfrac{8\pi}{5}A\int_A^1 \rho\, d(Z_2). \end{cases}$$

Comme la composante méridienne $\frac{1}{A}\frac{dV}{d\theta}$ est du premier ordre ou nulle avec l'excentricité, l'attraction totale sera représentée par la valeur précédente aux termes près du second ordre.

Le potentiel de la force centrifuge ayant pour expression

$$\frac{n^2 a^2}{3} - \frac{n^2 a^2}{2}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}),$$

sa composante, suivant $m0$, sera

$$-\frac{2n^2 A}{3} + n^2 A(\mu^2 - \tfrac{1}{3}),$$

et s'ajoutera à la valeur (j) pour obtenir l'accélération g' de la pesanteur apparente en m; car, pour le même motif que ci-dessus, on peut faire abstraction de la composante méridienne de cette force. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} g' = {} & \frac{4\pi}{3A^2}(1 - 2Z_0 - 2Z_2)\int_0^A \rho\, dA^3 + \frac{4\pi}{A^2}\int_0^A \rho\, d(A^3 Z_0) \\ & + \frac{12}{3}\frac{\pi}{A^4}\int_0^A \rho\, d(A^5 Z_2) + \frac{8\pi}{5}A\int_1^A \rho\, dZ_2 - \tfrac{2}{3}n^2 A + n^2 A(\mu^2 - \tfrac{1}{3}). \end{aligned}$$

La gravité apparente à la surface sera donnée par

$$(k)\qquad \begin{cases} g = \dfrac{4\pi}{5}(1 - 2Z_0 - 2Z_2)\displaystyle\int_0^1 \rho\, dA^3 + 4\pi\int_0^1 \rho\, d(A^3 Z_0) \\ \qquad + \dfrac{12\pi}{5}\displaystyle\int^1 \rho\, d(A^5 Z_2) - \tfrac{2}{3}n^2 + n^2(\mu^2 - \tfrac{1}{3}). \end{cases}$$

Mais l'équation (3) du n° **101**, en y faisant $A = A_1 = 1$, $\nu = 2$, $U_2 = -\frac{n^2}{2}(\mu^2 - \frac{1}{3})$, donne

$$-\frac{4\pi}{3} Z_2 \int_0^1 \rho\, dA^3 + \frac{4\pi}{5} \int_0^1 \rho\, d(A^5 Z_2) - \frac{n^2}{2}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) = 0.$$

En éliminant l'intégrale qui renferme Z_2 entre cette relation et la formule (k), on trouve

$$(l) \qquad g = G + \frac{4\pi}{3} Z_2 \int_0^1 \rho\, dA^3 + \tfrac{5}{2} n^2 (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) = 0,$$

en posant

$$(m) \qquad G = \frac{4\pi}{3}(1 - 2Z_0) \int_0^1 \rho\, dA^3 + 4\pi \int_0^1 \rho\, d(A^3 Z_0) - \tfrac{2}{3} n^2.$$

Au degré d'approximation convenu, on peut remplacer, dans la formule (l), le coefficient de Z_2 par G. D'autre part, on déduit la formule (e)

$$n^2 = \varphi' \frac{4\pi}{3} \int_0^1 \rho\, dA^3 = G\varphi'.$$

On a donc simplement

$$g = G\left[1 + Z_2 + \frac{5\varphi'}{2}(\mu^2 - \tfrac{1}{3})\right].$$

Enfin des formules (f) et (h) on déduit

$$Z_2 = HX_2 = -E(\mu^2 - \tfrac{1}{3}),$$

et l'on a, par suite,

$$g = G\left[1 + \left(\frac{5\varphi'}{2} - E\right)(\mu^2 - \tfrac{1}{3})\right] = G\left[1 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{5\varphi'}{2} - E\right) + \left(\frac{5\varphi'}{2} - E\right)\mu^2\right]$$
$$= G\left[1 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{5\varphi'}{2} - E\right)\right]\left[1 + \left(\frac{5\varphi'}{2} - E\right)\mu^2\right]$$

ou encore

$$(n) \qquad g = G\left[1 + \left(\frac{5\varphi'}{2} - E\right)\mu^2\right],$$

en remplaçant la constante $G\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{5\varphi'}{2} - E\right)\right]$ simplement par G.

Soient L la longueur du pendule à secondes à l'équateur ou corres-

pondant à la gravité G ; l la longueur du même pendule sur le parallèle dont θ est la colatitude; on a

$$l = \mathrm{L}[1 + (\tfrac{5}{2}\varphi - \mathrm{E})\mu^2].$$

Si Δ est l'excès relatif de la longueur du pendule au pôle sur celle du pendule à l'équateur, on a

$$\Delta = \tfrac{5}{2}\varphi - \mathrm{E}$$

ou

$$\Delta + \mathrm{E} = \tfrac{5}{2}\varphi.$$

Dans le cas de l'homogénéité, on a $\mathrm{E} = \frac{5}{4}\varphi$; par suite, $\Delta = \mathrm{E}$. Mais, *si le sphéroïde est hétérogène, autant l'aplatissement est au-dessus et au-dessous de* $\frac{5}{2}\varphi$, *autant* Δ *est au-dessous ou au-dessus de la même quantité.*

Des moments d'inertie. — Soient C et A les moments d'inertie du sphéroïde par rapport à l'axe de rotation et un diamètre quelconque de l'équateur. La formule (G) du n° 89 donne, en y faisant $\mathrm{B} = \mathrm{A}$ et en y remplaçant γ_2 par le coefficient $-hk$ de l'expression de $\mathrm{Z}_2 = h\mathrm{X}_2 = -hk(\mu^2 - \frac{1}{3})$,

$$\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}} = k\frac{\int_0^1 \rho\, d(\mathrm{A}^5 h)}{\int_0^1 \rho\, d\mathrm{A}^5}$$

ou, en remplaçant l'intégrale du numérateur par sa valeur, déduite de l'équation (h),

$$\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}} = \frac{k\mathrm{H}}{\mathrm{E}}\left(\mathrm{E} - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\int_0^1 \rho\mathrm{A}^2\, d\mathrm{A}}{\int_0^1 \rho\mathrm{A}^4\, d\mathrm{A}}$$

ou encore

$$(p) \qquad \frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}} = \left(\mathrm{E} - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\int_0^1 \rho\mathrm{A}^2\, d\mathrm{A}}{\int_0^1 \rho\mathrm{A}^4\, d\mathrm{A}},$$

puisque l'on a $\mathrm{E} = k\mathrm{H}$.

En ce qui concerne la Terre, on déduit de la théorie de la précession

des équinoxes, comme nous le verrons plus loin,

$$\frac{C-A}{C} = 0,00329,$$

et, en prenant

$$\varphi = 0,00345, \quad E = \frac{1}{300},$$

on trouve

$$\frac{\int_0^1 \rho A^2 \, dA}{\int_0^1 \rho A^4 \, dA} = 2,02.$$

104. Attraction sur un point extérieur d'un sphéroïde qui est ou qui a été liquide et qui peut être recouvert d'une masse fluide. — Désignons par M la masse totale du fluide et du sphéroïde; nous rappellerons que l'on a $Z_1 = 0$ et que l'indéterminée Z_0 peut être prise égale à zéro. L'équation (3) du n° **101** donne pour la surface, abstraction faite des astres, en ayant égard à la formule (*c*) du numéro précédent,

$$(q) \qquad \frac{4}{5}\int_0^1 \rho \, d(A^5 Z_2) = \frac{4\pi Z_2}{3}\int_0^1 \rho \, dA^3 - \frac{n^2}{2}\left(\mu^2 - \tfrac{1}{3}\right) = MZ_2 - \frac{M\varphi}{2}\left(\mu^2 - \tfrac{1}{3}\right)$$

et, pour $\nu > 2$,

$$(r) \qquad \frac{4\pi}{2\nu+1}\int_0^1 \rho \, d(A^{\nu+3} Z_\nu) = MZ_\nu.$$

Si, au lieu de prendre A_1 pour unité de longueur, on prend une unité quelconque, les valeurs (*q*) et (*r*) devront être multipliées respectivement par A_1^2 et A_1^ν. Ayant égard à ces valeurs, la formule (23) du n° **85**, relative à l'attraction du sphéroïde sur un point extérieur, devient

$$(8) \qquad V = \frac{M}{a} + M\sum_2 \frac{A_1^\nu Z_\nu}{a^{\nu+1}} - \frac{M A_1^2 \varphi}{2a^3}\left(\mu^2 - \tfrac{1}{3}\right).$$

Dans le cas d'un ellipsoïde, ν s'arrête à 2, et l'on a

$$V = \frac{M}{a} + \frac{M A_1^2}{a^3}\left[Z_2 - \frac{\varphi}{2}\left(\mu^2 - \tfrac{1}{3}\right)\right];$$

mais nous avons trouvé, au numéro précédent,

$$Z_2 = -E(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Il vient donc en définitive, pour le potentiel cherché,

$$V = \frac{M}{a} - \frac{M A_1^2}{a^3}\left(\frac{\varphi}{2} + E\right)(\mu^2 - \tfrac{1}{3}). \tag{9}$$

105. Hypothèses sur la loi de la variation de la densité de la Terre avec la profondeur. — Les considérations qui précèdent reçoivent leur application à la Terre, lorsqu'on la considère comme ayant été formée à l'origine d'une seule substance, en tenant compte de l'augmentation de densité à mesure que l'on s'approche du centre, augmentation due au poids des couches supérieures.

La loi qui régit les gaz et d'après laquelle, la température restant constante, la densité croît proportionnellement à la pression, ne convient ni aux liquides, ni aux solides, et l'expérience semble indiquer que ces corps résistent d'autant plus à la compression qu'ils sont plus comprimés; ce qui revient à regarder la dérivée de la pression par rapport à la densité comme croissant avec cette densité, mais suivant une loi qui n'est pas connue et sur laquelle on ne peut faire que des conjectures.

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire consiste à supposer que la dérivée dont il s'agit croît proportionnellement à la densité, et c'est celle qui a été imaginée et traitée par Legendre et discutée plus tard par Laplace.

E. Roche a modifié l'hypothèse de Legendre par l'introduction d'un terme proportionnel au carré de la densité, ce qui a pour effet de rendre plus rapide encore la loi de la compressibilité; il a tiré de là cette conséquence : la diminution de densité croît proportionnellement au carré de la distance au centre, ce qui s'accorde d'une manière très satisfaisante avec le résultat de l'expérience pendulaire, exécutée en 1854 par M. Airy dans la mine de houille de Harton, à 385^m de profondeur. Nous allons exposer successivement ces deux hypothèses, qui l'une et l'autre conduisent à des résultats intéressants.

106. Hypothèse de Legendre. — Nous considérerons la Terre

comme formée de couches sphériques homogènes, dont la densité peut varier d'une couche à une autre.

Le potentiel du sphéroïde sur un point m de son intérieur, situé à la distance A du centre, sera

$$\frac{4\pi}{a}\int_0^{A}\rho A^2\,dA,$$

en distinguant uniquement a de A relativement à la différentiation de cette quantité par rapport à a. Si p désigne la pression au point m, on aura, d'après un principe connu de l'Hydrostatique,

$$\frac{dp}{\rho}=4\pi d\frac{1}{a}\int_0^{1}\rho A^2\,dA$$

ou simplement

$$\frac{dp}{\rho}=-\frac{4\pi}{A^2}dA\int_0^{A}\rho A^2\,dA. \tag{1}$$

Désignons maintenant par α une constante positive et par ρ_1 la densité du sphéroïde à sa surface, où la pression est censée nulle ou négligeable, et posons

$$\frac{dp}{d\rho}=2\alpha\rho, \tag{2}$$

d'où

$$p=\alpha(\rho^2-\rho_1^2). \tag{3}$$

Des équations (1) et (2), on déduit, par l'élimination de dp,

$$\frac{d\rho}{dA}=-\frac{2\pi}{\alpha A^2}\int_0^{A}\rho A^2\,dA. \tag{4}$$

Posant

$$\frac{2\pi}{\alpha}=q^2,\quad \rho=\frac{x}{A}, \tag{a}$$

la formule (4) devient

$$A\frac{dx}{dA}-x=-q^2\int_0^{A}x\,A\,dA,$$

d'où, par la différentiation,

$$\frac{d^2x}{dA^2}+q^2x=0. \tag{5}$$

On déduit de là, en désignant par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ deux constantes arbitraires,

$$x = \mathfrak{A}\sin\mathrm{A}q + \mathfrak{B}\cos\mathrm{A}q \quad \text{et} \quad \rho = \frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{A}}\sin\mathrm{A}q + \frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{A}}\cos\mathrm{A}q.$$

La densité ne pouvant être infinie au centre où A est nul, il faut que $\mathfrak{B} = 0$, et l'on a simplement

$$\rho = \frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{A}}\sin\mathrm{A}q \tag{6}$$

ou

$$\rho = \frac{\rho_1}{\mathrm{A}}\frac{\sin\mathrm{A}q}{\sin q}, \tag{7}$$

en remarquant qu'à la surface on a $\mathrm{A} = 1$, $\rho = \rho_1$.

Si l'on désigne par D la densité moyenne de la Terre, on a

$$\int_0^1 \rho\,\mathrm{A}^2\,d\mathrm{A} = \mathrm{D}\int_0^1 \mathrm{A}^2\,d\mathrm{A} = \frac{\mathrm{D}}{3}. \tag{8}$$

Les équations (4) et (7) donnent à la surface

$$\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{A}}\right)_{\mathrm{A}=1} = -q^2\int_0^1 \rho\,\mathrm{A}^2\,d\mathrm{A} = -\frac{q^2\mathrm{D}}{3},$$

$$\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{A}}\right)_{\mathrm{A}=1} = -\rho_1\left(1 - \frac{q}{\operatorname{tang} q}\right);$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mathrm{D}}{\rho_1} = \frac{3}{q^2}\left(1 - \frac{q}{\operatorname{tang} q}\right). \tag{9}$$

Nous admettrons, dans ce qui suit, que les formules que nous venons d'établir sont applicables au cas où l'on tient compte de l'ellipticité.

Reportons-nous à la formule (5) du n° **101**, dans laquelle nous ferons $\nu = 2$ et où nous remplacerons Z_2 par une fonction h de A; d'après le n° **102**, nous avons

$$\frac{d^2h}{d\mathrm{A}^2} - \frac{6h}{\mathrm{A}^2} + \frac{2\rho\,\mathrm{A}}{\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} \rho\,\mathrm{A}^2\,d\mathrm{A}}\left(\frac{\mathrm{A}\,dh + h\,d\mathrm{A}}{d\mathrm{A}}\right) = 0, \tag{10}$$

équation que l'on peut mettre sous la forme suivante, comme il est fa-

cile de s'en assurer :

$$\frac{d^2\left(h\int_0^{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{A}}{}^2 d_{\mathrm{A}}\right)}{d_{\mathrm{A}}{}^2}-\frac{6h\int_0^{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{A}}{}^2 d_{\mathrm{A}}}{\mathrm{A}^2}-h_{\mathrm{A}}{}^2\frac{d\rho}{d_{\mathrm{A}}}=0$$

ou, en remplaçant ρ par $\frac{x}{\mathrm{A}}$ et $\frac{d\rho}{d_{\mathrm{A}}}$ par sa valeur tirée de l'équation (4),

$$\frac{d^2}{d_{\mathrm{A}}{}^2}\left(h\int_0^{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}}\,d_{\mathrm{A}}\right)-\frac{6h}{\mathrm{A}^2}\int_0^{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}}\,d_{\mathrm{A}}+q^2h\int_0^{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}}\,d_{\mathrm{A}}=0; \tag{11}$$

d'où (1)

$$\left\{\begin{aligned} h\int_0^{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}}\,d_{\mathrm{A}}= \quad & \mathrm{N}\left[\left(1-\frac{3}{q^2\mathrm{A}^2}\right)\sin q_{\mathrm{A}}+\frac{3}{q_{\mathrm{A}}}\cos q_{\mathrm{A}}\right] \\ & +\mathrm{N}'\left[\left(1-\frac{3}{q^2\mathrm{A}^2}\right)\cos q_{\mathrm{A}}-\frac{3}{q_{\mathrm{A}}}\sin q_{\mathrm{A}}\right], \end{aligned}\right. \tag{12}$$

en désignant par N et N′ deux constantes arbitraires.

Substituons maintenant, dans le premier membre de cette équation, la valeur $x=\rho_{\mathrm{A}}$ donnée par la formule (6), abstraction faite du coefficient $\mathfrak{A}$, qui viendrait se fondre dans N et N′; il vient

$$h=\frac{\mathrm{N}\left[\left(1-\frac{3}{q^2\mathrm{A}^2}\right)\sin q_{\mathrm{A}}+\frac{3}{q_{\mathrm{A}}}\cos q_{\mathrm{A}}\right]+\mathrm{N}'\left[\left(1-\frac{3}{q^2\mathrm{A}^2}\right)\cos q_{\mathrm{A}}-\frac{3}{q_{\mathrm{A}}}\sin q_{\mathrm{A}}\right]}{-q_{\mathrm{A}}\cos_{\mathrm{A}} q+\sin_{\mathrm{A}} q}$$

$$=-\mathrm{N}\left(\frac{3}{\mathrm{A}^2}+\frac{q^2\,\mathrm{tang}_{\mathrm{A}} q}{\mathrm{A}q-\mathrm{tang}_{\mathrm{A}} q}\right)+\mathrm{N}'\left(-\frac{3}{q_{\mathrm{A}}}+\frac{2+\frac{3}{q^2\mathrm{A}^2}}{\mathrm{A}q-\mathrm{tang}_{\mathrm{A}} q}\right).$$

Cette expression est celle de l'aplatissement de l'ellipse dont le grand axe est $2\mathrm{A}$; il est en effet inutile de la multiplier par le facteur constant k du n° 102 pour obtenir l'ellipticité, puisque le facteur se confondrait dans les constantes arbitraires N, N′; mais, comme son second terme devient infini pour $\mathrm{A}=0$, nous devons supposer N′ nul et nous avons simplement

$$h=-\mathrm{N}\left(\frac{3}{\mathrm{A}^2}+\frac{q^2\,\mathrm{tang}_{\mathrm{A}} q}{\mathrm{A}q-\mathrm{tang}_{\mathrm{A}} q}\right) \tag{13}$$

et $h=\mathrm{N}q^2$, pour $\mathrm{A}=0$.

---

(1) *Voir* le n° 21 de l'Introduction.

La formule (h) du n° 102 nous donne, pour l'aplatissement à la surface,

$$E = \frac{\varphi H}{2H - \frac{2}{5}\dfrac{\displaystyle\int_0^1 \rho\, d(A^5 h)}{\displaystyle\int_0^1 \rho A^2\, dA}} = \frac{\varphi H \displaystyle\int_0^1 x_A\, dA}{2H\displaystyle\int_0^1 x_A\, dA - \tfrac{2}{5} H\rho_1 + \tfrac{2}{5}\displaystyle\int_0^1 A^5 h\, d\rho}.$$

De la formule (12), abstraction faite du terme en N′, on déduit

$$H\int_0^1 x_A\, dA = N\left[\left(1 - \frac{3}{q^2}\right)\sin q + \frac{3}{q}\cos q\right],$$

d'où

$$E = \frac{\varphi N\left[\left(1 - \dfrac{3}{q^2}\right)\sin q + \dfrac{3}{q}\cos q\right]}{2N\left[\left(1 - \dfrac{3}{q^2}\right)\sin q - \dfrac{3}{q}\cos q\right] - \tfrac{2}{5} H\rho_1 + \tfrac{2}{5}\displaystyle\int_0^1 A^5 h\, d\rho}.$$

En remplaçant H et h par leurs valeurs données par la formule (13) et $d\rho$ par sa valeur déduite de l'équation (7), on trouve

$$E = \tfrac{5}{2}\varphi \frac{1 - \dfrac{3}{q^2}(1 - q\cot q)}{2 + q\cot q - q^2(1 - q\cot q)^{-1}}. \tag{14}$$

En prenant $E = \frac{1}{300}$, $\frac{5}{2}\varphi = 0{,}00865$, on obtient

$$q = 2{,}54$$

et, en vertu de l'équation (9),

$$\rho_1 = 0{,}458\,D.$$

Si l'on se reporte à la formule (7), on en déduit, pour la densité au centre,

$$\rho_0 = \rho_1 \frac{q}{\sin q} = 2{,}053\,D.$$

La pesanteur en un point intérieur du sphéroïde ou l'attraction de la

sphère de rayon α passant par ce point a pour expression

$$g = 4\pi \int_0^{\alpha} \rho \alpha^2 \, d\alpha = \rho_1 (\sin \alpha q - \alpha q \cos \alpha q)$$

ou, en appelant g_1 la valeur de g à la surface de la Terre ou correspondant à $\alpha = 1$,

$$g = g_1 \frac{\sin \alpha q - \alpha q \cos \alpha q}{\sin q - \alpha \cos q}. \tag{15}$$

Si R est le rayon de la Terre, on a, pour un petit abaissement η au-dessous de sa surface ou pour $\delta\alpha = -\frac{\eta}{R}$,

$$\frac{\delta g}{g_1} = 0{,}626 \frac{\eta}{R}.$$

Le rayon moyen de la Terre étant de $R = 6366000^m$, et la profondeur à laquelle M. Airy a fait ses observations étant $\eta = 385^m$, on a

$$\frac{\delta g}{g_1} = \frac{1}{26400},$$

nombre beaucoup plus petit que celui, $\frac{1}{19550}$, qui est donné par l'expérience. Si l'on voulait que la valeur (15) de g reproduisît l'accroissement observé, il faudrait prendre $q = 2$; mais alors l'aplatissement prendrait la valeur trop faible de $\frac{1}{311}$. Ainsi l'hypothèse de Legendre ne permet pas de représenter à la fois d'une manière satisfaisante la loi de la pesanteur et l'aplatissement.

107. Hypothèse de E. Roche. — Désignons par ρ_0 la densité au centre de la Terre et par β une constante; en posant

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta \alpha^2), \tag{16}$$

l'équation (1) du numéro précédent devient

$$\frac{dp}{\rho} = -4\pi \rho_0 \alpha \, d\alpha \left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{5} \alpha^2 \right) = -\frac{2\pi}{5} d\alpha^2 \left(\frac{2}{3} \rho_0 + \rho \right).$$

Mais nous avons

$$-d\alpha^2 = \frac{1}{\rho_0 \beta} d\rho;$$

par suite

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{2\pi\rho}{5\rho_0\beta}\left(\tfrac{2}{3}\rho_0 + \rho\right).$$

Cette formule ne diffère de celle qui résulte de l'hypothèse de Legendre que par l'introduction dans son second membre d'un terme proportionnel au carré de la densité.

Nous avons obtenu à la fin du n° 103 la relation

$$\frac{\int_0^1 \rho A^2\, dA}{\int_0^1 \rho A^4\, dA} = 2{,}02,$$

et, en y remplaçant ρ par sa valeur (16), on en déduit $\beta = 0{,}08$, d'où

$$\rho = \rho_0(1 - 0{,}8A^2). \tag{17}$$

En partant de là on trouve, pour l'expression de la densité moyenne de la Terre,

$$D = 3\int_0^1 \rho A^2\, dA = 0{,}52\,\rho_0,$$

d'où

$$\rho_0 = 1{,}923\,D.$$

D'après les expériences de M. Airy, la densité moyenne de la Terre n'est pas inférieure à 5,6; en admettant ce chiffre pour la valeur de D, on trouve

$$\rho_0 = 10{,}68,$$

et, pour la densité à la surface,

$$\rho_1 = 0{,}2\,\rho_0 = 2{,}14.$$

Cette densité est inférieure à la moyenne 2,7 des densités des divers granits que l'on considère comme formant la partie essentielle de l'écorce terrestre.

L'attraction de la sphère de rayon A, ou la gravité à la distance A du centre, a pour expression

$$g = \frac{4\pi}{A^2}\int_0^A \rho A^2\, dA = 4\pi\rho_0\left(\frac{A}{3} - 0{,}8\,\frac{A^3}{5}\right) = \tfrac{25}{12}g_1\left(A - \tfrac{12}{25}A^3\right),$$

en nous rappelant que nous avons désigné par g_1 l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre ou pour $A = 1$. On voit que l'accélération g augmente à partir de la surface jusqu'à la distance $A = \frac{5}{6}$, pour laquelle elle atteint sa valeur maximum $1,068 g_1$, qui est supérieure de plus de $\frac{1}{15}$ à la valeur à la surface. La pesanteur décroît ensuite, reprend la valeur g_1 pour $A = 0,655$, puis diminue à peu près proportionnellement à A jusqu'au centre où elle est nulle.

Pour une faible variation δA, on a

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{1 - \frac{36}{25} A^2}{A - \frac{12}{25} A^3} \delta A.$$

Supposons que l'on descende à la profondeur η, nous devrons faire dans la formule précédente $\delta A = -\frac{\eta}{R}$, $A = 1$, $g = g_1$, d'où

$$\frac{\delta g}{g_1} = \frac{11}{13} \frac{\eta}{R}.$$

En se plaçant dans les conditions de l'expérience de M. Airy, on obtient

$$\frac{\delta g}{g_1} = \frac{1}{19530}.$$

La différence entre ce résultat et la fraction $\frac{1}{19190}$ donnée par l'expérience est évidemment inférieure à l'erreur possible de l'observation.

En faisant $\rho = \rho_0(1 - \beta A^2)$ dans l'équation (10) du numéro précédent, on trouve

$$\frac{d^2 h}{dA^2} + \frac{30(1 - \beta A^2)}{A(5 - 3\beta A^2)} \frac{dh}{dA} - \frac{12\beta h}{5 - 3\beta A^2} = 0.$$

Si l'on pose $\sqrt{\beta} A = z$, il vient

$$\frac{d^2 h}{dz^2} + \frac{30(1 - z^2)}{z(5 - 3z^2)} \frac{dh}{dz} + \frac{12h}{5 - 3z^2} = 0.$$

Comme z est inférieur à l'unité, on pourra exprimer h par une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable et déterminer ensuite l'aplatissement des couches de niveau et, par suite, celui de la surface.

§ IV. — De la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide homogène, animée d'un mouvement de rotation uniforme.

108. Concevons qu'une masse fluide homogène, animée d'un mouvement uniforme de rotation, soumise à ses attractions mutuelles, pouvant recouvrir un noyau central solide, subisse sous l'influence de certaines causes extérieures des modifications de forme supposées très petites, et proposons-nous de déterminer les conditions nécessaires pour que ces modifications restent très petites, de manière que, après une série d'oscillations, la masse finisse par reprendre sa forme d'équilibre. Nous aurons ainsi les conditions relatives à la stabilité de l'équilibre de la masse.

Le tout se réduit, comme on le sait, à exprimer que l'accroissement infiniment petit du potentiel, qui est du second ordre, est négatif.

Soient

(S) la figure d'équilibre de la masse;

g la résultante sur un point de la surface de (S) de l'attraction de la masse et de la force centrifuge;

ρ la densité du fluide;

$d\omega$, $d\omega'$ deux éléments de la surface d'équilibre;

Δ leur distance;

z, z' les portions censées très petites des normales correspondantes, limitées par la surface variable.

L'accroissement du potentiel est dû : 1° à l'attraction sur lui-même de l'excès sphéroïdal limité par la surface variable et celle de l'équilibre; 2° à l'attraction de la masse (S) sur cet excès combinée avec la force centrifuge. Si la masse $\rho\, d\omega\, dz$ s'élève au-dessus de la surface variable au point correspondant à $d\omega$, l'attraction qu'elle reçoit de l'élément $\rho z'\, d\omega'$ de l'excès sphéroïdal donne lieu au potentiel $\rho^2\, d\omega\, d\omega' \frac{z'\, dz}{\Delta}$; l'élévation dz' au-dessus de la surface variable au point correspondant à $d\omega'$ donne de même, relativement à l'élément $\rho z\, d\omega$, le potentiel $\rho^2\, d\omega\, d\omega' \frac{z\, dz'}{\Delta}$; la somme de ces deux expressions étant $\rho^2 \frac{d\omega\, d\omega'}{\Delta} d(zz')$,

il vient, pour les déplacements z, z' au-dessus de la surface d'équilibre,

$$\rho^2 \frac{d\omega\, d\omega'}{\Delta} zz'.$$

Si l'on fait la somme des expressions semblables à cette dernière pour tout l'excès sphéroïdal, il est clair que l'on aura le double du potentiel dû à ses attractions mutuelles, puisque chaque élément s'y trouvera répété deux fois. On a donc, pour ce potentiel,

$$\frac{\rho^2}{2} \int\int \frac{zz'}{\Delta} d\omega\, d\omega',$$

chacune des intégrales s'étendant à la surface entière du sphéroïde.

Le travail élémentaire du poids $\rho g z\, d\omega$ étant $-\rho g\, d\omega\, z\, dz$, il vient, pour le potentiel correspondant au déplacement z mesuré à partir de la surface d'équilibre,

$$-\frac{\rho g}{2} z^2\, d\omega$$

et, pour tout l'excès sphéroïdal,

$$-\frac{\rho}{2} \int g z^2\, d\omega.$$

L'accroissement total du potentiel est donc

$$(1) \qquad \frac{\rho^2}{2} \int\int \frac{zz'\, d\omega\, d\omega'}{\Delta} - \frac{\rho}{2} \int g z^2\, d\omega,$$

et cette quantité doit être négative pour que l'équilibre soit stable.

109. De la stabilité de l'équilibre des mers. — Supposons que la surface d'équilibre et celle du noyau soient peu différentes de la forme sphérique et que la vitesse angulaire n_0 soit assez faible pour qu'on puisse négliger le carré de la force centrifuge à laquelle elle donne lieu à la surface, par rapport à l'attraction de la masse. L'accélération d'un point de la surface produite par cette attraction sera, par suite, représentée par g.

En prenant pour unité de longueur le rayon de la sphère équi-

valente au volume du sphéroïde et, pour unité de densité, la densité moyenne de la masse, nous aurons, à très peu près,

$$g = \frac{4\pi}{3}.$$

Nous avons

$$\frac{1}{\Delta} = \Sigma P_\nu,$$

P_ν étant la fonction du n° 73 symétrique par rapport aux angles θ, θ' et ϖ, ϖ', qui fixent les positions de $d\omega$ et $d\omega'$.

Soit $z = \Sigma Z_\nu$ le développement en fonction sphérique de z. Nous continuerons à représenter par Z'_ν ce que devient Z_ν quand on y change respectivement θ et ϖ en θ' et ϖ'.

Les éléments $d\omega = -d\mu\, d\varpi$, $d\omega' = -d\mu'\, d\varpi'$ peuvent être considérés comme étant sensiblement sphériques, et si une intégrale sous laquelle se trouve l'un de ces éléments doit être étendue à la surface entière du sphéroïde, ses limites seront o et 4π.

Nous avons ainsi (n° 78), ν étant différent de ν',

$$\int_0^{4\pi} Z_\nu P_{\nu'}\, d\omega = 0, \quad \int_0^{4\pi} Z_\nu Z_{\nu'}\, d\omega = 0,$$

$$\int_0^{4\pi} Z'_\nu P_{\nu'}\, d\omega' = 0, \quad \int_0^{4\pi} Z'_\nu Z'_{\nu'}\, d\omega' = 0,$$

et, en vertu de la formule (13) du n° 79,

$$\int_0^{4\pi} Z'_\nu P_\nu\, d\omega' = \frac{4\pi}{2\nu+1} Z_\nu.$$

Il vient, par suite,

$$\int^{4\pi} \frac{z'\, d\omega'}{\Delta} = \int_0^{4\pi} \Sigma Z'_\nu \Sigma P_\nu\, d\omega' = \sum \int_0^{4\pi} Z'_\nu P_\nu\, d\omega' = 4\pi \sum \frac{Z_\nu}{2\nu+1},$$

$$\int_0^{4\pi} z\, d\omega \int_0^{4\pi} \frac{z'\, d\omega'}{\Delta} = 4\pi \int_0^{4\pi} \sum \Sigma Z_\nu \sum \frac{Z_\nu}{2\nu+1}\, d\omega$$

$$= 4\pi \sum \int_0^{4\pi} \frac{Z_\nu^2}{2\nu+1}\, d\omega = 3g \sum \int_0^{4\pi} \frac{Z_\nu^2}{2\nu+1}\, d\omega,$$

$$\int_0^{4\pi} g z^2\, d\omega = g \sum \int_0^{4\pi} Z_\nu^2\, d\omega.$$

Au moyen des deux dernières de ces formules, il est facile de voir que l'expression (1) devient

$$-\frac{\rho g}{2}\int_0^{4\pi}\sum\left(1-\frac{3\rho}{2\nu+1}\right)Z_\nu^2\,d\omega$$
$$=-\frac{\rho g}{2}\left\{\int_0^{4\pi}[(1-\rho)Z_1^2+(1-\tfrac{3}{5}\rho)Z_2^2+\ldots]\,d\omega\right\},$$

en remarquant que Z_0 est nul par suite de l'invariabilité de la masse totale. Pour que cette quantité reste positive quelle que soit la déformation ou pour toutes les petites valeurs que l'on peut attribuer à $Z_1, Z_2, \ldots$, il faut que l'on ait $\rho < 1$. Donc, *pour que l'équilibre de la mer soit stable, il faut que sa densité soit inférieure à la densité moyenne de la Terre.*

Si cette condition n'était pas remplie, il y aurait certains déplacements pour lesquels les éléments matériels du fluide tendraient de plus en plus à s'éloigner des positions qui conviennent à l'équilibre, et l'équilibre serait instable pour ces déplacements.

§ V. — De la figure de l'anneau de Saturne.

110. L'anneau de Saturne est une couronne circulaire d'une très faible épaisseur, dont le centre est celui de la planète et dont la largeur est environ égale à la moitié du rayon intérieur, ce rayon étant égal aux $\frac{3}{2}$ de celui de la planète.

L'anneau n'est pas simple, et l'on a reconnu jusqu'ici qu'il est formé de trois anneaux concentriques presque situés dans le même plan, si toutefois on peut s'exprimer ainsi (1).

L'irradiation doit considérablement augmenter, en apparence, la largeur des anneaux. Il peut se faire aussi que chaque anneau se compose de plusieurs autres qui, par la cause précitée, paraissent se confondre en un seul pour l'observateur.

Nous supposerons, dans ce qui suit, que chaque anneau partiel est

---

(1)

Rayon équatorial de Saturne.....	64000^{km}
Rayon intérieur de l'anneau.....	94000
Rayon extérieur de l'anneau.....	142000

L'épaisseur de chacun des trois anneaux partiels est inconnue; mais elle ne paraît pas devoir dépasser 120^{km}.

fluide ou qu'il l'a été, qu'il affecte en conséquence la forme d'une surface d'équilibre, qu'il est homogène, que la distance entre deux anneaux partiels consécutifs est assez grande pour que, en raison de leurs faibles masses, on puisse négliger leurs actions mutuelles.

Chaque anneau partiel se trouvera ainsi sollicité par ses attractions mutuelles, par l'attraction de la masse de Saturne, planète que nous considérerons comme sphérique et composée de couches homogènes concentriques; enfin par la force centrifuge résultant de son mouvement de rotation autour de la planète censé uniforme, comme cela paraît résulter de l'observation.

L'attraction d'un anneau partiel sur un point de sa surface étant très petite par rapport à l'attraction de Saturne, et sa largeur, dans le sens du rayon, paraissant elle-même devoir être une très faible fraction de ce rayon, nous pourrons, sans inconvénient, négliger le rapport des dimensions transversales de l'anneau à son rayon, ce qui revient à considérer ce rayon comme infini. On est ainsi ramené à déterminer l'attraction d'un cylindre indéfini de même section que l'anneau sur un point de la surface.

111. La figure elliptique satisfait à la condition d'équilibre d'un anneau supposé fluide. — Soient

OZ l'axe de rotation et M la masse de Saturne;

C le centre d'une section méridienne de l'anneau;

Cz la parallèle à OZ menée par ce point;

OCy la perpendiculaire à OZ passant par le point C prise pour axe des y;

$a = \mathrm{OC}$ le rayon du cercle décrit avec la vitesse angulaire n par le point C;

M la masse de la planète;

y, z les coordonnées d'un point m du périmètre de la section considérée de l'anneau.

Nous prendrons la densité de l'anneau pour unité.

Le travail élémentaire de la force centrifuge du point m a pour valeur

$$(a) \qquad n^2(a+y)\,dy.$$

Le potentiel, c'est-à-dire le travail total de l'attraction de Saturne sur le

même point, est, en négligeant les puissances de z et y supérieures à la seconde,

$$\frac{M}{\sqrt{(a+y)^2+z^2}} = \frac{M}{a} - \frac{My}{a^2} + \frac{My^2}{a^3} - \frac{1}{2}\frac{Mz^2}{a^3};$$

d'où, pour le travail élémentaire,

$$(b) \qquad -\frac{M}{a^2}dy + \frac{2My\,dy}{a^3} - \frac{Mz\,dz}{a^3}.$$

Si l'on suppose que la section de l'anneau est une ellipse ayant pour équation

$$(1) \qquad y^2 + \gamma^2 z^2 = \alpha^2,$$

les formules (10) du n° 71, abstraction faite du facteur $m\rho$, nous donneront les composantes de l'attraction de l'anneau sur m, et, en les ajoutant après les avoir multipliées respectivement par dz, dy, nous avons, pour le travail élémentaire de cette attraction,

$$(c) \qquad -\frac{4\pi}{1+\gamma}(\gamma z\,dz + y\,dy).$$

La condition d'équilibre à la surface ou la somme des expressions (a), (b), (c) égalée à zéro sera

$$\left(\frac{M}{a^2} - n^2 a\right)dy + \left(\frac{4\pi}{\gamma+1} - \frac{2M}{a^3} - n^2\right)y\,dy + \left(\frac{4\pi\gamma}{\gamma+1} + \frac{M}{a^3}\right)z\,dz = 0.$$

Pour que cette équation coïncide avec l'équation différentielle de l'ellipse, il faut que l'on ait

$$(d) \qquad n^2 = \frac{M}{a^3}, \quad \frac{\dfrac{4\pi\gamma}{\gamma+1} + \dfrac{M}{a^3}}{\dfrac{4\pi}{\gamma+1} - \dfrac{2M}{a^3} - n^2} = \gamma^2,$$

d'où l'on déduit, par l'élimination de n^2,

$$(2) \qquad \frac{M}{4\pi a^3} = \frac{\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)(3\gamma^2+1)}.$$

On voit, d'après cette formule, que γ doit être supérieur à l'unité ou que l'anneau est nécessairement aplati. Considérée comme une équation de γ, elle a deux racines positives, puisque son second membre devient nul pour $\gamma = 0$ et $\gamma = \infty$.

Le maximum du second membre de l'équation (2) correspond à

$$\lambda = 2,594$$

et a pour valeur

$$0,0543026.$$

Si l'on désigne par R le rayon moyen et par D la densité moyenne de Saturne rapportée à celle de l'anneau, on a

$$M = \tfrac{4}{3}\pi R^2 D,$$

et, d'après les chiffres que nous venons de donner, la plus grande valeur que l'on puisse attribuer à D, en se reportant à la formule (2), est

$$0,162907\,\frac{a^2}{R^2}.$$

En supposant que l'on prenne pour a le rayon moyen de l'anneau total, on a à peu près

$$\frac{a}{R} = 2,$$

et 1,3 pour la limite supérieure de la densité de Saturne.

De la première des relations (d) ou

$$n^2 a = \frac{M}{a^2},$$

on conclut que *chaque anneau partiel se meut autour de la planète comme un satellite placé à la même distance.*

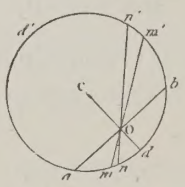
Il suit de là que la période de ce mouvement doit être de $0^j,44$ pour l'anneau intérieur, ce qui est conforme à l'observation.

112. Instabilité de l'équilibre d'un anneau régulier et irrégularité nécessaire pour la stabilité de l'équilibre. — Nous avons supposé à l'anneau de Saturne une forme régulière; mais, pour que son équilibre soit stable, il est nécessaire que la distribution des masses qui le constituent n'ait pas ce caractère d'une manière absolue, soit que la section soit variable, soit que son axe curviligne soit excentrique ou à double courbure, soit enfin qu'il ne soit pas homogène dans toutes ses parties. Ces inégalités de forme, quoique très faibles, sont indiquées par les apparitions et disparitions de l'anneau dans lesquelles les

deux anses présentent des phénomènes différents. Sans ces inégalités, l'anneau, sous l'influence du plus faible déplacement dû à la cause la plus légère, telle que l'attraction d'un satellite ou d'une comète, finirait par se précipiter sur la surface de Saturne.

Supposons, en effet (*fig.* 11), que le centre de Saturne soit en O et que le centre de l'anneau déplacé soit en C, et considérons une des cir-

Fig. 11.



conférences matérielles dans lesquelles cet anneau peut se décomposer; la corde *ab* menée en O, perpendiculairement à OC, déterminera, dans cette circonférence, les deux arcs inégaux *adb*, *ad'b*, dont le premier sera plus petit que l'autre. L'attraction de Saturne ou de O sur deux éléments *mn*, *m'n'* des deux arcs, déterminés par deux cordes infiniment voisines passant par O, sera plus grande pour le premier que pour le second, d'où résulte que l'attraction de la planète sur l'arc *adb* sera supérieure à celle qui se rapporte à *ad'b* ou que l'attraction totale sur la circonférence sera dirigée de O vers C et tendra à éloigner le second de ces centres du premier. Le centre de l'anneau supposé régulier ou composé d'un certain nombre de circonférences semblables à la précédente finirait donc par s'éloigner de plus en plus de celui de la planète, et l'anneau arriverait à se joindre à Saturne.

Les divers anneaux qui entourent le globe de Saturne sont, par conséquent, des solides irréguliers d'une largeur inégale dans les différents points de leurs circonférences, de telle sorte que leurs centres de gravité ne coïncident pas avec leur centre de figure. Ces centres de gravité peuvent être considérés comme autant de satellites qui circulent autour du centre de Saturne, à des distances qui dépendent de l'inégalité des parties de chaque anneau, avec des vitesses angulaires égales à celles de leurs anneaux respectifs.

CHAPITRE V.

DE LA FORME DE LA TERRE DÉDUITE DES MESURES GÉODÉSIQUES.

113. Dans le Chapitre précédent, nous avons reconnu que la Terre doit affecter la forme d'un ellipsoïde de révolution, en partant de cette hypothèse qu'elle a été primitivement fluide et que le refroidissement n'a pas dû modifier sensiblement la forme de sa surface libre.

Cette induction théorique est-elle admissible? C'est ce que les mesures géodésiques peuvent seules décider. Or on sait que les opérations de cette nature ont pour objet de déterminer la forme et la longueur des arcs d'une classe de courbes appelées *lignes géodésiques*, définies par cette propriété, savoir que chacune d'elles est le plus court chemin de l'un de ses points à un autre, sur la surface de laquelle elle est tracée. On est donc conduit, en premier lieu, à déterminer la relation qui existe entre la forme d'une surface et les lignes géodésiques.

Une ligne géodésique jouit des deux propriétés suivantes :

1° *Son plan osculateur est normal à sa surface* (1);

(1) On arrive facilement à ce résultat par les considérations élémentaires suivantes :
Soient

a, b deux points infiniment voisins d'une courbe quelconque;
O le centre de courbure en a;
$\varepsilon = a\mathrm{O}b$ l'angle de contingence au même point;
c la longueur de la corde de l'arc $ab = ds$;
ρ le rayon de courbure $\mathrm{O}a$.

On a

$$c = 2\rho \sin\frac{\varepsilon}{2} = 2\rho\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^3}{6.8}\right) = \rho\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{24}\right) = ds\left(1 - \frac{c^2}{24\rho^2}\right),$$

d'où

$$ds = c\left(1 - \frac{c^2}{24\rho^2}\right).$$

Si a. b sont deux points d'une courbe tracée sur une surface, on voit que ds sera mini-

2° *Un point assujetti à se mouvoir sur la surface, sans l'intervention d'aucune force extérieure, décrit une ligne géodésique* (1).

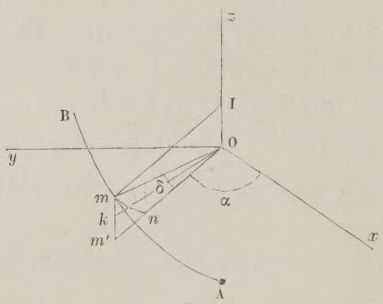
La recherche de l'équation générale des lignes géodésiques d'une surface présente, au point de vue de l'intégration, de grandes difficultés, qui n'ont été surmontées, pour le cas simple des surfaces du second degré, qu'en ayant recours à l'emploi des coordonnées curvilignes.

Nous nous bornerons, dans ce qui suit, à étudier le seul cas réellement utile dans la Géodésie proprement dite, étudié par Laplace et à la solution duquel nous conduira d'une manière très simple la théorie des mouvements relatifs.

Pour déterminer une ligne géodésique, il suffit de se donner les positions de deux points par lesquels elle doit passer ou un point et la direction de la tangente à ce point.

114. Lignes géodésiques d'un sphéroïde très peu différent d'une sphère. — Soient (*fig.* 12)

Fig. 12.



Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires menés par le centre O de la sphère dont le sphéroïde diffère peu;

---

mum quand ρ sera maximum, ce qui, en vertu du théorème de Meusnier, démontre la propriété énoncée.

On comprendra, sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, qu'un arc géodésique peut être le maximum de la distance d'un point à un autre sur la surface.

(1) En effet, l'accélération du mobile est normale à la surface, comme la réaction de cette surface à laquelle elle est due.

$r = a(1 + u)$ le rayon vecteur d'un point quelconque m de la surface du sphéroïde, a étant la valeur de ce rayon relative à un point déterminé;

m', I les projections de m sur le plan xOy et sur Oz;

α, δ les angles $m'Ox$, mOm';

AB une ligne géodésique du sphéroïde, cette ligne étant censée décrite par le point m qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure, en vertu d'une vitesse constante qui reste arbitraire.

Nous admettrons que toutes les valeurs que peut prendre la fonction u de α et δ sont assez petites, ainsi que celles de leurs dérivées, pour qu'on puisse en négliger les carrés et leurs produits deux à deux.

Désignons par A le point de départ de la ligne et prenons pour a la valeur du rayon vecteur de ce point. Cette ligne ne différera que de quantités de l'ordre u du grand cercle dont le plan est mené par la tangente en A, censée donnée en direction, soit immédiatement, soit indirectement.

Soient R, M, P les composantes de l'accélération du mobile m suivant Om, sa perpendiculaire en m comprise dans le plan mOz, dans le sens de l'accroissement de δ, et la perpendiculaire au même plan dans le sens de l'accroissement de α.

La position du plan xOy pourra être choisie arbitrairement par rapport au plan du grand cercle ci-dessus, à la condition toutefois que ces deux plans fassent entre eux un angle de l'ordre de u. Il suit de là que δ sera de cet ordre et devra être traité comme la fonction u au point de vue du degré d'approximation convenu.

Supposons que u soit développé en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de δ, et soit

$$u = u_0 + u_1\delta + u_2\delta^2 + \dots$$

ce développement, dans lequel le premier terme est du premier ordre, le second du second ordre, etc.

Nous emploierons la lettre ∂ pour caractériser les différentielles partielles relatives à la surface du sphéroïde, en réservant la lettre d pour désigner les différentielles qui se rapportent à la courbe.

On a, aux termes du second ordre près,

$$(a)\qquad \begin{cases} u = u_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} = \dfrac{du_0}{d\alpha}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \delta} = u_1, \\ \dfrac{du}{d\alpha} = \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial u}{\partial \delta}\dfrac{d\delta}{d\alpha} = \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} + u_1 \dfrac{\partial \delta}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \end{cases}$$

valeurs qui sont indépendantes de δ.

Si s désigne l'arc Am, on a, aux termes du second ordre près,

$$(1)\qquad ds = a(1+u)\,d\alpha.$$

Comme la vitesse constante $\dfrac{ds}{dt}$ du point m peut être choisie arbitrairement, nous la prendrons égale à a, et nous aurons

$$(1+u)\frac{d\alpha}{dt} = 1,$$

d'où

$$(2)\qquad \frac{d\alpha}{dt} = 1 - u.$$

Le point m décrit dans le plan mobile zOm' une courbe mn, en vertu d'une accélération dont nous allons d'abord déterminer les composantes. A cet effet, nous pouvons considérer ce mouvement comme résultant d'un mouvement relatif suivant le rayon Om, qui tourne lui-même autour du point O; on a donc, dans le plan ci-dessus, l'accélération relative

$$(b)\qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = a\frac{d^2 u}{dt^2}, \quad \text{suivant } Om,$$

l'accélération tangentielle d'entraînement

$$(c)\qquad a(1+u)\frac{d^2\delta}{dt^2} = a\frac{d^2\delta}{dt^2}, \quad \text{suivant la direction de M},$$

et ce sont les deux accélérations dont on ait à tenir compte, attendu que l'accélération centrifuge $r\left(\dfrac{d\delta}{dt}\right)^2$ et l'accélération centrifuge composée $2\dfrac{d\delta}{dt}\dfrac{dr}{dt} = 2a\dfrac{d\delta}{dt}\dfrac{du}{dt}$ sont du second ordre et négligeables.

Connaissant les composantes de l'accélération du point m dans le plan mobile zOm', cherchons à déterminer celles de l'accélération absolue.

La vitesse relative du point m en projection sur le plan xOy étant égale à

$$\frac{dr}{dt}\cos\delta + r\frac{d\delta}{dt}\sin\delta = a\frac{du}{dt},$$

on a, pour l'accélération centrifuge composée prise en sens contraire due à la rotation du plan zOm' autour de Oz,

$$(d) \qquad 2a\frac{d\alpha}{dt}\frac{du}{dt}, \quad \text{suivant la direction de P.}$$

La composante tangentielle d'entraînement est

$$(d') \qquad r\cos\delta\frac{d^2\alpha}{dt^2} = a(1+u)\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \text{suivant la même direction de P.}$$

L'accélération normale d'entraînement $-r\frac{d\alpha^2}{dt}\cos\delta$, dirigée suivant la perpendiculaire Im à Oz, donne les composantes

$$(b') \qquad -a(1+u)\frac{d\alpha^2}{dt^2}, \qquad \text{suivant } Om,$$

$$(c') \qquad a(1+u)\frac{d\alpha^2}{dt^2}\sin\delta = a\frac{d\alpha^2}{dt^2}\delta, \quad \text{suivant la direction de M.}$$

Nous avons donc

$$(e) \qquad \left\{\begin{aligned} a\frac{d^2u}{dt^2} - a(1+u)\frac{d\alpha^2}{dt^2} &= \mathrm{R},\\ 2a\frac{d\alpha}{dt}\frac{du}{dt} + a(1+u)\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \mathrm{P},\\ a\frac{d^2\delta}{dt^2} + a\frac{d\alpha^2}{dt^2}\delta &= \mathrm{M} \end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant t par α dans les termes du premier ordre, en vertu de l'équation (2), $\frac{d\alpha}{dt}$ par sa valeur fournie par la même équation, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$

par celle qui s'en déduit,

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{d\alpha^2} - (1-u) = \dfrac{R}{a}, \\ \dfrac{du}{d\alpha} = \dfrac{P}{a}, \\ \dfrac{d^2\delta}{d\alpha^2} + \delta = \dfrac{M}{a}. \end{cases}$$

Les deux premières des équations (3) donnent respectivement la valeur de R et de P. La troisième est la seule à considérer et le tout se réduit à trouver l'expression de M.

La résultante de R, M, P étant normale à la surface, on a

$$(f)\qquad 0 = R\,dr + M r\,d\delta + P r\cos\delta\,d\alpha = R\,dr + aM\,d\delta + aP\,d\alpha;$$

mais de l'équation

$$r - a(1+u) = 0$$

on déduit

$$dr - a\frac{\partial u}{\partial\delta}d\delta - a\frac{\partial u}{\partial\alpha}d\alpha = 0.$$

En identifiant ce résultat avec l'équation (f), on trouve

$$(g)\qquad \begin{cases} M = -R\dfrac{\partial u}{\partial\delta}, \\ P = -R\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} \end{cases}$$

ou, en vertu de la première des équations (3), en continuant à négliger les termes du second ordre,

$$(4)\qquad \begin{cases} M = a\dfrac{\partial u}{\partial\delta}, \\ P = a\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}. \end{cases}$$

La dernière de ces formules, comme cela devait être, est identique à la seconde des formules (3), en raison de la quatrième des relations (a).

En se rappelant que

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = u_1,$$

la troisième des équations (3) devient

$$\frac{d^2\delta}{d\alpha^2} + \delta = u_1 \tag{5}$$

et a pour intégrale (1)

$$\delta = C\cos\alpha + C'\sin\alpha - \sin\alpha \int u_1 \cos\alpha\, d\alpha - \cos\alpha \int u_1 \sin\alpha\, d\alpha, \tag{6}$$

en désignant par C, C′ deux constantes arbitraires que l'on déterminera en vertu des conditions auxquelles le point A doit satisfaire.

Soit ρ le rayon de courbure au point B de la trajectoire; l'accélération en ce point est

$$\frac{a^2}{\rho} = \sqrt{R^2 + M^2 + P^2}$$

ou

$$\frac{a^2}{\rho} = -R,$$

en continuant à négliger les termes du second ordre. Il suit de là, en ayant égard à la première des équations (3), que

$$\frac{a}{\rho} = 1 - u - \frac{d^2u}{d\alpha^2}. \tag{7}$$

On reconnaîtra facilement que l'angle que forme la tangente au point B de la courbe avec le plan yOx est égal à $\frac{d\delta}{d\alpha}$.

Soit ψ l'angle formé avec Ox par la normale en m à la surface; la composante M, qui est du premier ordre, ne donnera suivant Om, par suite suivant Ox, qu'une composante du second ordre; la projection de l'accélération du mobile sur Ox se réduisant à $R\cos\alpha - P\sin\alpha$, il vient, en ayant égard à la seconde des formules (g),

$$\cos\psi = \frac{R\cos\alpha - P\sin\alpha}{\sqrt{R^2 + M^2 + P^2}} = \frac{R\cos\alpha - P\sin\alpha}{R} = \cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial \alpha}\sin\alpha,$$

(1) *Voir* le n° 23 de l'Introduction.

d'où

$$\psi = \alpha + \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \alpha + \frac{du}{d\alpha} \tag{8}$$

ou

$$\alpha = \psi - \frac{\partial u}{\partial \psi} = \psi - \frac{du}{d\psi}, \tag{9}$$

en substituant à α la variable ψ dans $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, ce qui est permis aux termes du second ordre près.

Menons par Ox un plan (P) parallèle à la normale au point m de la surface, et désignons par V l'angle que fait ce plan avec yOx. La trace du plan dont il s'agit sur le plan yOz sera la projection sur ce dernier plan de l'accélération de m transportée parallèlement à elle-même au point O. Or nous avons, pour les composantes de l'accélération,

$$\begin{aligned} &R\sin\alpha + P\cos\alpha \ldots\ldots\ldots \quad \text{suivant } Oy \\ &R\sin\delta + M\cos\delta \ldots\ldots\ldots \quad \text{» } Oz \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\text{(10)} \quad \operatorname{tang} V = V = \frac{R\delta + M}{R\sin\alpha + P\cos\alpha} = \frac{\delta}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial \delta} = \frac{\delta}{\sin\psi} - \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial u}{\partial \delta}.$$

Désignons par ϖ l'angle formé par la tangente en m avec le plan (P), et soit k le point où ce plan coupe mm'; $m'k$ étant égal à la distance $a\sin\alpha$ du point m' à Ox, multipliée par tang V ou V, on a

$$mk = a(V\sin\alpha - \delta).$$

En passant de m à un point m_1 infiniment voisin de la ligne géodésique, le plan (P) étant supposé fixe ou V constant, mk varie de

$$d.mk = a(V\cos\alpha\, d\alpha - d\delta).$$

La projection de mm_1 sur le plan (P) pouvant être considérée comme égale à $a\,d\widehat{k}Ox = a\,d\alpha$, il vient

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{d.mk}{a\,d\alpha} = V\cos\alpha - \frac{d\delta}{d\alpha}$$

ou

$$\varpi = V\cos\psi - \frac{d\delta}{d\psi}. \tag{11}$$

115. Application à la Géodésie. — Les formules précédentes deviendront immédiatement applicables à la Terre en les transformant convenablement en coordonnées géodésiques. Nous nous bornerons à examiner les deux cas particuliers développés dans le t. II des *Œuvres de Laplace*.

Nous rappellerons que le *zénith* en un point de la surface du sphéroïde terrestre est l'intersection de la voûte fictive, dite *céleste*, avec la normale en ce point. Le *méridien céleste* au même point est le plan déterminé par la ligne des pôles et le zénith, ou encore le plan qui, passant par la ligne des pôles, est parallèle à la normale au point considéré de la surface.

La *latitude* en un point de la Terre est le complément de l'angle formé par la normale avec la ligne des pôles; on donne à ce dernier angle le nom de *colatitude*.

La *longitude* d'un lieu est l'angle compris sous le méridien céleste correspondant et un méridien céleste fixe.

La longitude et la latitude ou la colatitude sont les coordonnées employées en Géodésie, par le motif que ce sont celles qui se prêtent le mieux aux observations.

1° *La tangente au point de départ est parallèle au méridien céleste correspondant.*

Soient (*fig.* 13)

PP′ l'axe de la Terre;

PAP′ le grand cercle passant par la tangente AT au point de départ A;

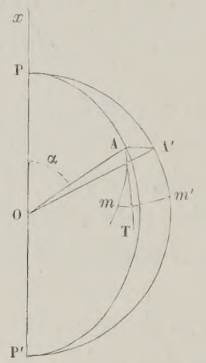
A′ la projection de A sur son méridien, qui, aux termes du second ordre près, se trouve sur la circonférence comprise dans le plan de ce méridien et dont le diamètre est PP′.

Nous prendrons le plan PA′P′ pour plan des xy et OP pour direction de l'axe des x; nous conserverons d'ailleurs les notations qui précèdent.

L'angle V représente alors l'angle formé par les méridiens des points

m et A, c'est-à-dire la différence des longitudes de ces deux points; ψ la colatitude du premier de ces points; ϖ l'angle formé par la tangente en B avec le méridien de ce point et qui est nul pour le point A par suite de la condition que nous nous sommes imposée.

Fig. 13.



En affectant de l'indice zéro les quantités qui se rapportent au point A, nous avons $\varpi_0 = 0$, $V_0 = 0$; les valeurs des dérivées partielles affectées de l'indice zéro seront celles qui correspondent à $\alpha = 0$, et la formule (11) nous donne, par suite,

$$\left(\frac{d\delta}{d\psi}\right)_0 = 0.$$

Comme $\delta - \delta_0$ est une quantité du premier ordre ou nulle avec u, on voit que $\frac{d\delta}{d\psi}$, développée suivant les puissances de $(\delta - \delta_0)$, devra être négligée d'après ce qui a été convenu, et la formule (11) se réduira à la suivante :

$$V \cos\psi = \varpi. \tag{12}$$

Si le point m est suffisamment voisin de A, on pourra remplacer dans cette formule ψ par ψ_0, et l'on aura simplement

$$V \cos\psi_0 = \varpi. \tag{12'}$$

On voit ainsi que, par l'observation seule et indépendamment de la connaissance de la figure de la Terre, on peut déterminer les longi-

tudes des extrémités d'un arc géodésique qui a été mesuré, et si la valeur de ϖ déduite de la formule (12′) est telle qu'on ne puisse pas l'attribuer aux erreurs d'observation, on sera certain que la Terre n'est pas un sphéroïde de révolution.

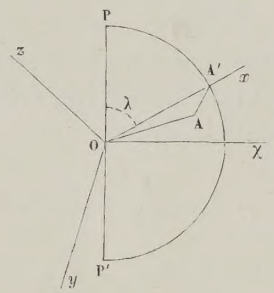
2° *La tangente au point de départ est normale au méridien correspondant.*

Nous conserverons aux lettres P, P′, A, A′ la même signification que ci-dessus; aux termes du second ordre près, la direction de la droite AA′ est celle de la tangente en A.

Nous prendrons pour axe des x la direction de OA′ et pour axe des y la perpendiculaire en O au plan PA′P′.

Soient (*fig.* 14)

Fig. 14.



φ, φ_0 les colatitudes de m et de A;
λ l'angle POA′, qui ne diffère de φ_0 que d'une quantité de l'ordre de u;
Oχ la perpendiculaire en O à OP comprise dans le plan PA′P′.

Aux termes du second ordre près, l'accélération de m a pour composantes :

$$\mathrm{R}\cos\alpha - \mathrm{P}\sin\alpha \ldots\ldots \text{ suivant } Ox$$

$$(a)\quad \mathrm{Y} = \mathrm{R}\sin\alpha + \mathrm{P}\cos\alpha - \mathrm{M}\delta\sin\alpha = \mathrm{R}\sin\alpha + \mathrm{P}\cos\alpha \ldots \text{ » } Oy$$

$$\mathrm{R}\sin\delta + \mathrm{M}\cos\delta = \mathrm{R}\delta + \mathrm{M} \ldots\ldots \text{ suivant } Oz$$

$$(b)\quad \mathrm{X} = (\mathrm{R}\cos\alpha - \mathrm{P}\sin\alpha)\sin\lambda - (\mathrm{R}\delta + \mathrm{M})\cos\lambda \ldots\ldots \text{ » } O\chi$$

ou

$$(b')\qquad \mathrm{X} = \mathrm{R}(\cos\alpha\sin\lambda - \delta\cos\varphi_0) - \mathrm{P}\sin\alpha\sin\varphi_0 - \mathrm{M}\cos\varphi_0,$$

et enfin

$$(c) \qquad Z = (R\cos\alpha - P\sin\alpha)\cos\lambda + (R\delta + M)\sin\lambda \ldots \quad \text{suivant OP}$$

ou

$$(c') \qquad Z = R(\cos\alpha\cos\lambda + \delta\sin\varphi_0) - P\sin\alpha\cos\varphi_0 + M\sin\varphi_0.$$

Nous avons, par suite,

$$\cos\varphi = \frac{Z}{R} = \cos\alpha\cos\lambda + \delta\sin\varphi_0 - \frac{P}{R}\sin\alpha\cos\varphi_0 + \frac{M}{R}\sin\varphi_0$$

ou, en vertu des formules (g) du n° 114,

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\lambda + \delta\sin\varphi_0 + \frac{\partial u}{\partial\alpha}\sin\alpha\cos\varphi_0 - \frac{\partial u}{\partial\delta}\sin\varphi_0.$$

Pour le point A, la valeur α_0 de α est du premier ordre et δ est nul; on a ainsi, en se rappelant que les dérivées de u doivent être considérées comme étant indépendantes de δ,

$$(13) \qquad \begin{cases} \cos\lambda = \cos\varphi_0 + \dfrac{\partial u}{\partial\delta}\sin\varphi_0, \\ \sin\lambda = \sin\varphi_0 - \dfrac{\partial u}{\partial\delta}\cos\varphi_0. \end{cases}$$

Il vient donc

$$(14) \quad \cos\varphi = \cos\alpha\cos\varphi_0 + \delta\sin\varphi_0 + \frac{\partial u}{\partial\alpha}\sin\alpha\cos\varphi_0 + \frac{\partial u}{\partial\delta}(\cos\alpha - 1)\sin\varphi_0.$$

Si nous désignons par U l'angle compris sous les méridiens des points m et A ou la différence des longitudes de ces points, nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} U = \frac{Y}{X} &= \frac{R\sin\alpha + P\cos\alpha}{R(\cos\alpha\sin\lambda - \delta\cos\varphi_0) - P\sin\alpha\sin\varphi_0 - M\cos\varphi_0} \\ &= \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\lambda} + \frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\varphi_0}\left(\delta\cos\varphi_0 + \frac{P}{R}\sin\varphi_0 + \frac{M}{R}\cos\varphi_0\right) \end{aligned}$$

ou, en se reportant aux formules (g) du n° 114 et (13),

$$(15) \quad \operatorname{tang} U = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\varphi_0} + \frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\varphi_0}\left[\delta\cos\varphi_0 - \frac{\partial u}{\partial\alpha}\sin\varphi_0 - \frac{\partial u}{\partial\delta}(1 - \sin\alpha\cos\alpha)\cos\varphi_0\right]$$

Comme on doit avoir $U = 0$ pour $\alpha = \alpha_0$, $\delta = 0$, cette formule donne

$$\alpha_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial \delta}\right)_0 \cot \varphi_0,$$

en caractérisant par l'indice zéro les valeurs des dérivées correspondant à $\alpha = 0$.

Proposons-nous maintenant de déterminer l'angle Π que forme la tangente au point m avec le méridien de ce point. Supposons, à cet effet, que, dans les formules (a), (b), (c) établies plus haut, R, M, P, X, Y, Z représentent, non plus les composantes de l'accélération, mais celles de la vitesse. Nous avons

$$R = a\frac{du}{dt} = a\frac{du}{d\alpha}, \quad P = a(1+u)\frac{d\alpha}{dt} = a(1+u),$$

$$M = a\frac{d\delta}{dt} = a\frac{d\delta}{d\alpha}, \quad \sqrt{R^2+P^2+M^2} = a(1+u);$$

$$(d) \quad \begin{cases} \dfrac{X}{a} = \dfrac{du}{d\alpha}\cos\alpha\sin\varphi_0 - (1+u)\sin\alpha\sin\lambda - \dfrac{d\delta}{d\alpha}\cos\varphi_0 \\ \quad = \dfrac{du}{d\alpha}\cos\alpha\sin\varphi_0 - (1+u)\sin\alpha\sin\varphi_0 + \dfrac{\partial u}{\partial\delta}\sin\alpha\cos\varphi_0 - \dfrac{d\delta}{d\alpha}\cos\varphi_0; \end{cases}$$

$$(e) \quad \frac{Y}{a} = \frac{du}{d\alpha}\sin\alpha + (1+u)\cos\alpha;$$

$$(f) \quad \begin{cases} \dfrac{Z}{a} = \dfrac{du}{d\alpha}\cos\alpha\cos\varphi_0 - (1+u)\sin\alpha\cos\lambda + \dfrac{d\delta}{d\alpha}\sin\varphi_0 \\ \quad = \dfrac{du}{d\alpha}\cos\alpha\cos\varphi_0 - (1+u)\sin\alpha\cos\varphi_0 - \dfrac{\partial u}{\partial\delta}\sin\alpha\sin\varphi_0 + \dfrac{d\delta}{d\alpha}\sin\varphi_0. \end{cases}$$

La composante de la vitesse parallèle à la trace du méridien de m sur le plan xOy étant

$$X\cos U + Y\sin U,$$

nous avons

$$\cos\Pi = \frac{1}{a(1+u)}\sqrt{Z^2 + (X\cos U + Y\sin U)^2}$$

$$= \frac{1}{a(1+u)}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2 - (X\sin U - Y\cos U)^2}$$

ou

$$(16) \qquad \cos\Pi = \sqrt{1 - \left[\frac{X\sin U - Y\cos U}{a(1+u)}\right]^2},$$

et il est facile de s'assurer que l'on a bien $\Pi = 90^\circ$ pour le point A.

Supposons que l'arc Am soit assez petit pour que l'on puisse négliger le cube de α dans les termes indépendants de u et le carré dans les termes dépendant de cette quantité. Nous avons, en négligeant la seconde puissance de $(\varphi - \varphi_0)$,

$$\cos\varphi = \cos(\varphi - \varphi_0 + \varphi_0) = \cos\varphi_0 - (\varphi - \varphi_1)\sin\varphi_0,$$

et la formule (14) nous donne

$$(14') \qquad \varphi - \varphi_0 = \alpha\cot\varphi_0\left[\frac{\alpha}{2} - \left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)_0\right] - \delta.$$

Comme cette valeur est du second ordre, c'est avec raison que nous en avons négligé le carré.

La formule (17) nous donne

$$(15') \quad \left\{\begin{aligned} U = \frac{\alpha}{\sin\varphi_0} + \frac{1}{\sin^2\varphi_0}\Big\{ & \delta\cos\varphi_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)_0\sin\varphi_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial\delta}\right)_0\cos\varphi_0 \\ & - \alpha\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}\right)_0\sin\varphi_0 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\delta}\right)\cos\varphi_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial\delta}\right)_0\cos\varphi_0\right]\Big\}. \end{aligned}\right.$$

De la formule (16) on déduit

$$(16') \qquad \cos\Pi = \sqrt{1 - \frac{Y^2}{a^2} + 2u\frac{Y^2}{a^2} + 2\frac{XYU}{a^2}(1-2u) + \frac{U^2}{a^2}(Y^2 - X^2)}.$$

Nous avons, au degré d'approximation convenu,

$$u = \left(\frac{du}{d\alpha}\right)_0\alpha, \quad \frac{du}{d\alpha} = \left(\frac{du}{d\alpha}\right)_0 + \left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}\right)\alpha$$

et de plus

$$\left(\frac{d\delta}{d\alpha}\right)_0 = 0, \quad \frac{d\delta}{d\alpha} = \left(\frac{d^2\delta}{d\alpha^2}\right)_0\alpha.$$

Les valeurs (d) et (e) se réduisent ainsi aux suivantes :

$$\frac{X}{a} = \left[\left(\frac{du}{d\alpha}\right)_0 + \left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}\right)_0\alpha\right]\sin\varphi_0 - \alpha\sin\varphi_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial\delta}\right)_0\alpha\cos\varphi_0 - \left(\frac{d^2\delta}{d\alpha^2}\right)_0\alpha\cos\varphi_0,$$

$$\frac{Y}{a} = 2\left(\frac{du}{d\alpha}\right)_0\alpha + 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

et nous voyons déjà que la formule (16′) se simplifie et devient

$$(16'')\quad \left\{\begin{aligned}\cos\Pi &= \sqrt{1-\frac{Y^2}{a^2}+2u\frac{Y^2}{a^2}+2\frac{XYU}{a^2}+\frac{U^2}{a^2}Y^2}\\ &= \sqrt{1-\frac{Y^2}{a^2}+2\left(\frac{du}{dx}\right)_0 x+2U\sin\varphi_0\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0-x\right]+U^2}\\ &= \sqrt{x^2-2\left(\frac{du}{dx}\right)_0 x+2U\sin\varphi_0\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0-x\right]+U^2}.\end{aligned}\right.$$

Il vient donc enfin

$$(16''')\quad \cos\Pi = \sqrt{x^2-2\left(\frac{du}{dx}\right)_0 x+2x\left[\left(\frac{du}{dx_0}\right)_0-x\right]+\frac{x^2}{\sin^2\varphi_0}} = x\cot\varphi_0,$$

et l'on arrive ainsi au même résultat que si le sphéroïde était une sphère.

Nous nous arrêterons à ces recherches théoriques et nous renverrons, pour l'application aux résultats des mesures géodésiques des formules ci-dessus, au tome V des *Œuvres de Laplace*, où est discutée la majeure partie des mesures exécutées jusqu'à présent. Qu'il nous suffise de dire que ces mesures n'ont pas accusé de différences sensibles entre la forme de la Terre et l'ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire que l'observation n'a pas donné de valeurs appréciables pour les angles que nous avons désignés par V, ϖ.

CHAPITRE VI.

DE LA FIGURE DES MASSES GAZEUSES QUI ENVIRONNENT LES CORPS CÉLESTES.

§ I. — Des atmosphères des corps célestes.

116. L'atmosphère d'un corps céleste est une masse gazeuse qui l'environne et qui s'appuie sur sa surface en raison des attractions exercées sur les éléments de cette masse.

Les couches atmosphériques participent au mouvement de rotation de l'astre, qu'elles recouvrent en raison des composantes tangentielles de leurs actions moléculaires au contact et des composantes semblables relatives à la dernière couche et au sphéroïde.

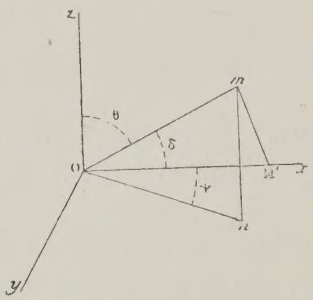
La faible densité d'une atmosphère permet de négliger l'attraction mutuelle de ses propres molécules, et l'on peut, de même, faire abstraction de l'excentricité du sphéroïde qu'elle recouvre et auquel nous supposerons, par conséquent, la forme sphérique.

Il est évident qu'une atmosphère affecterait une forme permanente si ses différentes particules n'étaient sollicitées que par la force centrifuge et l'attraction du sphéroïde. Mais cette hypothèse, la seule étudiée par Laplace, n'est guère admissible que pour l'atmosphère solaire; c'est pourquoi nous envisagerons avec E. Roche, à qui est due presque toute la substance de ce Chapitre, la question à un point de vue plus général, en supposant que la masse est attirée par un astre qui en est éloigné et dont le centre est situé dans le plan de l'équateur du sphéroïde. En dehors de ces deux cas particuliers suivants : 1° l'attraction extérieure est négligeable; 2° le mouvement du centre de gravité de l'astre extérieur se réduit à une rotation identique à celle du sphéroïde autour

de son axe, cas pour lesquels l'atmosphère aura une forme permanente, la figure de la masse fluide subira des fluctuations dues à l'action variable de l'astre extérieur et périodiques avec cette action; mais alors nous nous proposerons de déterminer la figure d'équilibre qui conviendrait à chaque position du même astre. En supposant la rotation nulle, on se trouvera dans les conditions d'une comète ayant un simple mouvement de translation autour du Soleil.

117. Équation générale des surfaces de niveau. — Soient (*fig.* 15)

Fig. 15.



M la masse du sphéroïde;
n sa vitesse angulaire autour de son axe;
O son centre de gravité;
r la distance à ce centre d'une molécule m de l'atmosphère;
θ l'angle formé par r avec l'axe de rotation Oz;
M′ la masse de l'astre extérieur dont le centre de gravité, que nous désignerons par la même lettre, est situé sur une perpendiculaire Ox à Oz;
a la distance OM′;
Oy la perpendiculaire en O au plan zOx;
ψ l'angle formé avec Ox par la projection On de Om sur le plan xOy;
x, y, z les coordonnées du point m.

La partie du potentiel due à l'attraction du sphéroïde et à la force centrifuge est

$$(a) \qquad \frac{M}{r} + \frac{n^2 r^2 \sin^2\theta}{2}.$$

L'accélération au centre de gravité O de M produite par M′ est $\frac{M'}{a^2}$; si l'on veut apprécier les phénomènes qui se passent à la surface du sphéroïde, il faut concevoir que l'on imprime à ce corps, ainsi qu'à son atmosphère, une vitesse et une accélération translatoires égales et contraires à celle du point O, qui se trouvera ainsi ramené au repos. On voit ainsi que l'élément matériel m doit être considéré comme possédant les deux accélérations

$$-\frac{M'}{a^2} \cdots\cdots\cdots \text{ suivant } Ox,$$

$$\frac{M'}{\overline{mM'}^2} \cdots\cdots\cdots \quad » \quad mM'.$$

Il suit de là que la partie du potentiel, résultant de l'attraction de M′, est

$$(b) \qquad \frac{M'}{mM'} - \frac{M'}{a^2}x.$$

Cela posé, désignons par δ l'angle mOx, ce qui revient à écrire

$$x = r\cos\delta,$$

et supposons que le rapport $\frac{r}{a}$ soit assez petit pour qu'on puisse négliger celles de ses puissances qui sont supérieures à la seconde; nous aurons

$$\frac{1}{mM'} = (r^2 + a^2 - 2ar\cos\delta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{r\cos\delta}{a} + \frac{r^2}{2a^2}(3\cos^2\delta - 1)\right];$$

l'expression (b) devient, par suite,

$$(b') \qquad \frac{M'}{a} + \frac{M'r^2}{2a^3}(3\cos^2\delta - 1).$$

On obtiendra l'équation générale des surfaces de niveau en égalant à une constante arbitraire C la somme des expressions (a) et (b'), ce qui donne, en remarquant que $\cos\delta = \sin\theta\cos\psi$,

$$(c) \qquad \frac{M'}{a} + \frac{M'r^2}{2a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) + \frac{M}{r} + \frac{n^2r^2\sin^2\theta}{2} = C.$$

Soient T la durée de la révolution de M′ autour du point O; τ la durée d'une révolution de M autour de Oz; nous avons

$$n^2 = \frac{4\pi^2}{\tau^2}$$

et, d'après la formule (12) du n° 3,

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{M + M'}{a^3}.$$

Si donc nous posons

$$\mu = \frac{M}{M'}, \quad \gamma = \frac{T^2}{\tau^2}, \tag{1}$$

nous aurons

$$n^2 = \gamma M' \frac{1 + \mu}{a^3}, \tag{2}$$

et l'équation (*c*) devient, en faisant passer $\frac{M'}{a}$ dans la constante du second membre,

$$\frac{r^2}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) + \frac{2\mu}{r} + \gamma(1+\mu)\frac{r^2\sin^2\theta}{a^3} = C. \tag{3}$$

Cette équation, exprimée en coordonnées rectangulaires ou

$$\frac{2x^2 - y^2 - z^2}{a^3} + \frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \gamma(1+\mu)\frac{x^2+y^2}{a^3} = C, \tag{4}$$

montre, conformément à ce que l'on devait prévoir, que les surfaces de niveau sont symétriques par rapport aux plans coordonnés, qu'elles ne deviennent de révolution autour de Oz que si M′ n'existe pas ou que $\mu = \infty$, et autour de Ox que si la vitesse angulaire n est nulle ou si $\gamma = 0$.

118. De la surface limite d'une atmosphère. — L'atmosphère d'un corps céleste ne peut s'étendre indéfiniment et doit être limitée à la surface au delà de laquelle les molécules cessent de peser sur le sphéroïde. L'équation de cette surface s'obtiendra en égalant à zéro la composante, suivant r, de la force qui sollicite une molécule ou la dé-

rivée par rapport à r du potentiel V, représenté par le premier membre de l'équation (3), ce qui donne

$$\frac{r}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) - \frac{\mu}{r^2} + \gamma(1+\mu)\frac{r\sin^2\theta}{a^3} = 0, \tag{5}$$

et l'on doit avoir, pour tout point intérieur à la surface libre ou appartenant réellement à l'atmosphère, $\frac{dV}{dr} < 0$ ou

$$\frac{r}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) - \frac{\mu}{r^2} + \gamma(1+\mu)\frac{r\sin^2\theta}{a^3} < 0. \tag{6}$$

On s'assurera facilement que la surface limite est symétrique par rapport aux plans coordonnés et qu'elle est de révolution dans les mêmes cas que les surfaces de niveau.

En égalant à zéro les dérivées partielles $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\psi}$ pour obtenir les directions correspondant aux minima de r, on trouve que ces directions sont celles des trois axes coordonnés Ox, Oy, Oz; les valeurs correspondantes r_0, r_1, r_2 de r sont données par

$$r_0^3 = \frac{\mu a^3}{2+\gamma(1+\mu)},$$

$$r_1^3 = \frac{\mu a^3}{\gamma(1+\mu)-1},$$

$$r_2^3 = -\mu a^3.$$

Ainsi la surface ne coupe pas l'axe Oz ni l'axe Oy si $\gamma(1+\mu) < 1$, dans tous les cas, le plus petit rayon est dirigé suivant Ox.

Pour que $\frac{r}{a}$ reste une petite fraction, il faut qu'il en soit de même de $\frac{r_0^3}{a^3}$, condition qui sera toujours remplie dans les applications que nous ferons des formules que nous avons établies, soit parce que μ est très petit pour les comètes, soit parce que γ est très grand quand il s'agit du Soleil.

119. Discussion des surfaces de niveau intérieures à la surface limite. — L'équation (3), différentiée par rapport à θ seulement,

donne

$$(7)\qquad \frac{dr}{d\theta}=\frac{3\cos^2\psi+\gamma(1+\mu)}{\frac{\mu}{r^2}-\frac{r}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi-1)-\gamma(1+\mu)\frac{r\sin^2\theta}{a^3}}\frac{r^2}{a^3}\sin\theta\cos\theta\,d\theta,$$

et, comme le dénominateur de cette expression est positif en vertu de la condition (6), il en est de même de $\frac{dr}{d\theta}$. Ainsi le rayon vecteur augmente avec θ, quel que soit l'azimut ψ, en allant de l'équateur au pôle. L'axe des pôles est, par suite, le plus petit des trois axes.

Si, θ restant constant, ψ augmente de zéro à $\frac{\pi}{2}$, le dénominateur de $\frac{dr}{d\theta}$ augmente et son numérateur diminue; d'où il suit que $\frac{dr}{d\theta}$ diminue, c'est-à-dire que l'augmentation de r avec θ est d'autant moins rapide que ψ s'approche plus de $\frac{\pi}{2}$. On conclut de là que le plus grand des trois axes est dirigé vers le corps troublant.

Tous les rayons r étant finis, la surface est fermée, et comme chacun d'eux est inférieur au rayon minimum r_0 de la surface fermée, on a

$$(8)\qquad r<\frac{a\sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{2+\gamma(1+\mu)}}\quad\text{ou}\quad\frac{\mu a^3}{r^3}>2+\gamma(1+\mu).$$

L'équation (3) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{[3\cos^2\psi+\gamma(1+\mu)]\sin^2\theta-1}{a^3}r^3-Cr+2\mu=0,$$

et n'a qu'une seule racine positive correspondant à chaque valeur de C si la condition (6) est remplie ou si

$$r<a\sqrt[3]{\frac{\mu}{[3\cos 2\psi+\gamma(1+\mu)]\sin^2\theta-1}}.$$

En effet, si cette équation avait deux racines positives α et β, la troisième racine serait $-(\alpha+\beta)$ et sa valeur absolue, d'après l'inégalité précédente, serait inférieure à

$$2a\sqrt[3]{\frac{\mu}{[3\cos 2\psi+\gamma(1+\mu)]\sin^2\theta-1}};$$

Le produit des trois racines serait donc inférieur à

$$\frac{2\mu a^3}{[3\cos 2\psi + \gamma(1+\mu)]\sin^2\theta - 1},$$

tandis qu'il doit être égal à cette expression qui est le dernier terme de l'équation en r. Cette équation ne peut donc avoir qu'une seule racine positive; en d'autres termes, l'*atmosphère n'a qu'une figure possible d'équilibre.*

Soient $R > R' > R''$ les valeurs de r correspondant aux directions Ox, Oy, Oz; l'équation (3) donne

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{R''^3}{a^3} + CR'' - 2\mu = 0, \\ [1-\gamma(1+\mu)]\dfrac{R'^3}{a^3} + CR' - 2\mu = 0, \\ [2+\gamma(1+\mu)]\dfrac{R^3}{a^3} - CR + 2\mu = 0; \end{cases}$$

d'où, par l'élimination de C,

$$(10)\qquad \frac{R''^3}{R^3} + \left[\frac{2\mu a^3}{R^3} + 2 + \gamma(1+\mu)\right]\frac{R''}{R} - \frac{2\mu a^3}{R^3} = 0,$$

$$(11)\qquad [1-\gamma(1+\mu)]\frac{R'^3}{R^3} + \left[\frac{2\mu a^3}{R^3} + 2 + \gamma(1+\mu)\right]\frac{R'}{R} - \frac{2\mu a^3}{R^3} = 0.$$

Il résulte de ces équations que *les couches de niveau, sensiblement sphériques vers le centre de gravité, vont en s'aplatissant en allant vers les pôles et en s'allongeant dans la direction de l'astre extérieur à mesure que l'on s'éloigne de ce centre.*

En effet, en posant

$$u = \frac{\mu a^3}{R^3}, \quad v = \frac{R''}{R},$$

l'équation (10) donne

$$(12)\qquad u = \frac{v^3 + [2+\gamma(1+\mu)]v}{2-2v};$$

d'où

$$(13)\qquad \frac{dv}{du} = \frac{2-2v}{3v^2 + 2u + 2 + \gamma(1+\mu)},$$

et cette dérivée est positive, puisque $v < 1$; ainsi, quand on s'éloigne

du centre ou que R croît, u décroît, et il en est de même de $\varphi = \frac{R''}{R}$. Dans le voisinage du centre, u est très grand et, en vertu de la formule (12), φ diffère peu de l'unité; $\frac{d\varphi}{du}$ étant très petit, $\frac{R''}{R}$ reste sensiblement égal à l'unité.

En posant

$$w = \frac{R'}{R},$$

l'équation (11) donne

$$u = \frac{[1 - \gamma(1+\mu)]w^3 + [2 + \gamma(1+\mu)]w}{2 - 2w}; \tag{14}$$

d'où

$$\frac{dw}{du} = \frac{2 - 2w}{2u + 2 + \gamma(1+\mu) + 3[1 - \gamma(1+\mu)]w^2}.$$

Le numérateur de cette dérivée est positif; il en est de même du dénominateur lorsque $1 - \gamma(1+\mu) \geq 0$.

Supposons maintenant que l'on ait

$$1 - \gamma(1+\mu) < 0;$$

pour que la valeur (14) soit positive, il faut que

$$w^2 < \frac{2 + \gamma(1+\mu)}{\gamma(1+\mu) - 1}.$$

Il suit de là que

$$2u + 2 + \gamma(1+\mu) - 3[\gamma(1+\mu) - 1]w^2 > 2[u - 2 - \gamma(1+\mu)]$$

ou que le dénominateur de $\frac{dw}{du}$ est positif, puisque, d'après la condition (8), le second membre de cette inégalité est positif.

Ainsi donc $\frac{R}{R'}$ croît avec R, et l'on verrait, comme pour $\frac{R}{R''}$, que, vers le centre, ce rapport est sensiblement égal à l'unité.

120. Discussion de la surface libre d'une atmosphère. — Nous appellerons *surface libre* de l'atmosphère la plus grande des surfaces de niveau fermée, c'est-à-dire celle qui atteint la surface limite. C'est à la surface libre que se termine l'atmosphère quand elle s'étend aussi loin

que possible; mais elle peut se terminer à une autre surface de niveau intérieure.

Pour trouver la valeur de la constante C qui correspond à la surface libre, il suffit d'exprimer que le demi-grand axe R de cette surface est égal au plus petit rayon r_0 (n° **118**) de la surface limite ou que

$$R = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{2+\gamma(1+\mu)}}. \tag{15}$$

En ayant égard à cette valeur, la troisième des équations (9) donne

$$CR = 3\mu; \tag{16}$$

d'où

$$C = \frac{3\mu^{\frac{2}{3}}\sqrt{2+\gamma(1+\mu)}}{a} \tag{16'}$$

et

$$u = \frac{\mu a^3}{R^3} = 2+\gamma(1+\mu). \tag{16''}$$

Les équations (12) et (14) deviennent

$$\varphi^3 + 3[2+\gamma(1+\mu)]\varphi - 2[2+\gamma(1+\mu)] = 0, \tag{17}$$

$$[1-\gamma(1+\mu)]w^3 + 3[2+\gamma(1+\mu)]w - 2[2+\gamma(1+\mu)] = 0. \tag{18}$$

De l'équation (17) on tire

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{\varphi(2-3\varphi)^2}{6\varphi^2(1-\varphi)}, \quad \frac{d\varphi}{d\gamma} = \frac{(1+\mu)(3\varphi-2)^2}{6\varphi^2(1-\varphi)},$$

et, comme φ est inférieur à l'unité, ces dérivées sont constamment positives, c'est-à-dire que φ croît avec μ et γ. Le minimum de φ, qui correspond à $\mu = 0$, $\gamma = 0$, est donné par l'équation

$$\varphi^3 - 6\varphi - 4 = 0,$$

qui n'a qu'une racine réelle dont la valeur approchée est 0,626. Le maximum de φ, qui a lieu pour $\mu = \infty$, $\gamma = \infty$, est $\frac{2}{3} = 0{,}667$, et l'on voit ainsi que, dans tous les cas, $\frac{R''}{R}$ diffère peu de $\frac{2}{3}$.

Lorsque μ et γ seront donnés, on pourra toujours calculer le rapport φ au moyen de l'équation (17), et il n'y aura pas d'incertitude, puisque

cette équation a deux racines imaginaires et une racine comprise entre 0,626 et 0,667.

L'équation (18) donne

$$\frac{d\varpi}{d\mu}=\frac{\gamma(\varpi-1)^4(\varpi+2)^2}{18\varpi^2(1-\varpi)},\quad \frac{d\varpi}{d\gamma}=\frac{(1+\mu)(\varpi-1)^4(\varpi+2)^2}{18\varpi^2(1-\varpi)},$$

et, comme $\varpi<1$, ces deux dérivées sont positives ou ϖ croît avec μ et γ. Le minimum de ϖ, qui correspond à $\mu=0$, $\gamma=0$, est donné par la même équation que celui de ρ et a pour valeur approchée 0,626. Son maximum, qui a lieu pour $\mu=\infty$, $\gamma=\infty$, dépend de l'équation

$$\varpi^3-3\varpi+2=(\varpi-1)^2(\varpi+2)=0$$

ou est égal à l'unité. Le rapport de l'axe moyen au grand axe ne pourra donc varier qu'entre 0,626 et l'unité, limites entre lesquelles se trouvera comprise l'unique racine réelle de l'équation, qui correspond à des valeurs données de μ et de γ, si $1-\gamma(1+\mu)>0$; dans le cas contraire, cette équation a une racine négative, une racine positive plus grande que l'unité et une autre racine comprise entre 0,626 et 1 qui conviendra seule à la question.

L'équation (4) donne, en substituant à C la valeur $\frac{3\mu}{R}$, qui convient à la surface libre, et en y remplaçant x par $x+R$, de manière à placer l'origine à l'un des sommets situés sur Ox,

$$\frac{2x^2+4Rx+2R^2-y^2-z^2}{a^3}+\frac{2\mu}{\sqrt{(x+R)^2+y^2+z^2}}+\gamma(1+\mu)\frac{x^2+2Rx+R^2+y^2}{a^3}=\frac{3\mu}{R}.$$

Pour $x=0$, $y=0$, $z=0$, les trois dérivées partielles du premier ordre du premier membre de cette équation, que nous désignerons par F, sont nulles; il y a donc, par suite, au sommet une infinité de plans tangents dont l'équation de l'enveloppe est

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0x^2+2\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)_0xy+\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)y^2+2\left(\frac{d^2F}{dx\,dz}\right)_0xz+2\left(\frac{d^2F}{dy\,dz}\right)_0yz+\left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)z^2=0$$

ou, en remplaçant F par sa valeur,

$$[3+\gamma(1+\mu)]z^2-3[2+\gamma(1+\mu)]x^2+3y^2=0, \tag{19}$$

équation d'un cône du second degré qui est de révolution autour de Ox lorsque $\gamma=0$. En vertu de la symétrie, l'autre extrémité du grand axe jouit de la même propriété.

Au delà de ces deux points singuliers, la surface libre formera deux nappes indéfinies qui ne peuvent offrir de l'intérêt qu'au point de vue géométrique.

121. Des surfaces de niveau extérieures à la surface libre. — Examinons maintenant ce que deviennent les surfaces de niveau au delà de la surface libre.

La troisième des équations (9) donne

$$C=\frac{2\mu+[2+\gamma(1+\mu)]\dfrac{R^3}{a^3}}{R},$$

$$\frac{dC}{dR}=-\frac{2\mu+[4+2\gamma(1+\mu)]\dfrac{R^3}{a^3}}{R^2}.$$

On voit ainsi que les surfaces de niveau qui coupent l'axe Ox à des distances croissantes depuis zéro jusqu'à la valeur (15), correspondant à la surface libre, répondent à des valeurs de C décroissantes depuis l'infini jusqu'à la valeur (16′).

En supposant que C aille encore en décroissant à partir de cette limite (16′), on aura des surfaces de niveau qui couperont la surface limite, mais qui ne rencontreront plus l'axe Ox, puisque R devient imaginaire. Les courbes d'intersection de l'une de ces surfaces de niveau avec la surface limite satisferont à la condition

$$r=\frac{3\mu}{C}, \tag{α}$$

obtenue en retranchant de l'équation (3) l'équation (5) multipliée par r.

En considérant θ et ψ comme constants, l'équation (3) donne

$$\frac{dC}{dr} = \frac{2r}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) - \frac{2\mu}{r^2} + \frac{2\gamma(1+\mu)r\sin^2\theta}{a^3}$$

et, en éliminant θ et ψ au moyen de la même équation,

$$\frac{dr}{dC} = \frac{r}{2\left(C - \frac{3\mu}{r}\right)}.$$

Tant que cette dérivée aura une valeur finie, deux surfaces de niveau consécutives, répondant aux valeurs C et $C + dC$ de la constante, différeront infiniment peu. Mais, d'après la formule (α), dans le voisinage de la courbe suivant laquelle une surface de niveau traverse la surface libre, $\frac{dr}{dC}$ devient infini.

En considérant la surface libre, puis la surface de niveau correspondant à une valeur un peu moindre de C, on reconnaîtra que la seconde surface enveloppe la première, qu'elle en diffère infiniment peu jusque dans le voisinage de l'axe Ox, mais que, au lieu de couper cet axe comme la surface libre, elle s'arrête avant de l'atteindre, devient tangente aux rayons vecteurs partant de l'origine O et s'éloigne ensuite indéfiniment.

122. De l'atmosphère solaire. — Nous pouvons ici supposer $\mu = \infty$, attendu que l'attraction des planètes sur un point de l'atmosphère est négligeable par rapport à celle du noyau solaire, soit en raison de la petitesse relative de leurs masses, soit par suite de leur éloignement de la masse qu'elles attirent.

En vertu de la formule (3), les surfaces de niveau ont pour équation générale

$$\frac{2}{r} + \frac{\gamma}{a^3}r^2\sin^2\theta = C$$

et sont de révolution, comme on devait le prévoir. Dans cette équation, on devra supposer, en se reportant à la formule (2),

$$\frac{\gamma}{a^3} = \frac{n^2}{M} = \alpha,$$

en désignant par α le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, sous l'équateur, à l'unité de distance du centre.

Les équations (11) et (10) nous donnent

$$\frac{R'}{R} = 1, \quad \frac{R - R''}{R} = \frac{\alpha R^3}{2 + \alpha R^3}.$$

On voit ainsi que l'aplatissement des couches va en croissant avec la distance au centre.

L'équation (5) de la surface limite devient

$$\alpha r^3 \sin^2\theta = 1$$

et celle de la surface libre, en se reportant aux formules (3) et (16'),

$$\frac{2}{r} + \alpha r^2 \sin^2\theta = 3\alpha^{\frac{1}{3}}.$$

Les deux demi-axes de cette dernière surface sont

$$R'' = \tfrac{2}{3}R, \quad R' = R = \alpha^{-\frac{1}{3}}.$$

L'équation (19) du lieu géométrique des plans tangents à chacun des sommets du grand axe de la surface libre devient

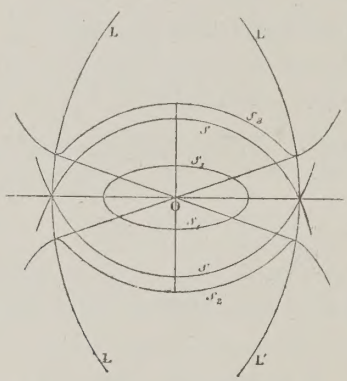
$$y = \pm z\sqrt{3}$$

et représente deux plans faisant entre eux un angle de 120°. On voit ainsi que la surface, qui est de révolution, possède dans le plan de l'équateur une arête saillante qui n'est autre chose que l'intersection fermée de la surface libre avec les deux nappes indéfinies.

La section faite par l'axe de rotation du Soleil doit donner un profil analogue à celui de la *fig.* 16, dans laquelle L et L' représentent les deux nappes de la surface limite, s la surface libre, s_1 une surface de niveau intérieure, s_2 une surface de niveau extérieure à s. Si, par suite d'une certaine influence, le fluide atmosphérique enveloppant le Soleil dépasse la surface libre, il s'écoulera dans le plan de l'équateur par les ouvertures que présentent dans cette région les surfaces de niveau s_2, formera une sorte d'anneau circulant autour du Soleil, mais indé-

pendant de l'atmosphère; cet effet se produira, par exemple, si le noyau solaire éprouve, en se refroidissant, une contraction, d'où une réduction du moment d'inertie et une augmentation de la vitesse angulaire; car, α allant en augmentant et R en diminuant, la surface se rétrécit, en restant semblable à elle-même, et le fluide qui se trouve au dehors s'échappe ainsi qu'on vient de le dire.

Fig. 16.



La matière qui réfléchit la lumière zodiacale ne peut pas être considérée comme faisant partie de l'atmosphère solaire, car elle affecte la forme d'une lentille très aplatie dont l'arête vive se trouve dans le plan de l'équateur, tandis que, d'après ce que nous avons vu plus haut, le rapport du petit axe au grand axe de l'atmosphère ne peut pas être inférieur à 0,626. D'autre part, les valeurs trouvées pour R, R″ montrent que cette atmosphère ne peut pas s'étendre jusqu'à l'orbite d'une planète qui circulerait autour du Soleil dans un temps égal à celui de la rotation de cet astre sur lui-même, c'est-à-dire à $25\frac{1}{2}$ jours; elle est donc fort loin d'atteindre les orbes de Mercure et de Vénus, tandis que la lumière zodiacale s'étend beaucoup au delà. Il y a donc tout lieu de croire que le fluide zodiacal circule autour du Soleil suivant les mêmes lois que les planètes et que c'est pour cette cause qu'il n'oppose aucune résistance sensible à leurs mouvements.

123. De l'atmosphère lunaire. — Jusque dans ces derniers temps, l'existence de cette atmosphère était considérée comme rentrant dans

le domaine des hypothèses; mais MM. Thollon et Trépied, en observant à Souhag (haute Égypte) l'éclipse totale du 17 mai 1882, ont reconnu par l'analyse spectrale qu'il y avait une atmosphère lunaire, malgré son état de raréfaction.

L'attraction de la Terre est la seule force qui peut influer d'une manière sensible sur la forme d'équilibre de l'atmosphère lunaire, et, comme la Lune nous présente toujours la même face, on doit conclure que sa rotation autour d'elle-même est égale à la rotation relative de la Terre autour de son satellite. Nous savons d'ailleurs que la distance a est très sensiblement constante.

Nous devrons donc supposer $\tau = \mathrm{T}$ dans la formule (1) ou $\gamma = 1$ dans les suivantes. Nous ferons remarquer, en prenant à la lettre les conventions qui précèdent, que l'atmosphère lunaire affectera rigoureusement une forme d'équilibre.

Les équations (3) et (5) des surfaces de niveau et de la surface limite deviennent respectivement, dans le cas actuel,

$$(3') \qquad \frac{r^2}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) + \frac{2\mu}{r} + (1+\mu)\frac{r^2\sin^2\theta}{a^3} = \mathrm{C},$$

$$(5') \qquad \frac{r}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) - \frac{\mu}{r^2} + (1+\mu)\frac{r\sin\theta}{a^3} = 0.$$

Nous rappellerons que les couches atmosphériques sont sensiblement sphériques vers le centre et qu'elles vont en s'aplatissant aux pôles et en s'allongeant vers la Terre à mesure que l'on s'éloigne de ce centre.

En négligeant la petite fraction μ devant trois unités, la formule (16') donne, pour la valeur de la constante correspondant à la surface d'équilibre,

$$\mathrm{C} = \frac{3^{\frac{3}{2}}\mu^{\frac{2}{3}}}{a},$$

et la formule (15), pour son demi-grand axe,

$$\mathrm{R} = a\sqrt{\frac{\mu}{3}}.$$

La masse de la Lune rapportée à celle de la Terre étant estimée à

$\mu = \frac{1}{84}$, on a

$$\frac{R}{a} = \frac{10}{63},$$

soit environ $\frac{1}{6}$, et l'on voit que l'atmosphère lunaire ne pourrait pas s'étendre au delà de la sixième partie de la distance de la Lune à la Terre.

Des équations (10) et (11) on déduit, en y faisant $\gamma = 1$ et en y négligeant μ,

$$\frac{R''}{R} = 0{,}638, \quad \frac{R'}{R} = \frac{2}{3}.$$

L'équation (19) du cône enveloppe des plans tangents aux sommets de la surface libre devient

$$4z^2 - 9x^2 + 3y^2 = 0.$$

Si le fluide atmosphérique se trouve en excès, on reconnaîtra, en employant un raisonnement analogue à celui du numéro précédent, que l'écoulement aura lieu par les deux pointes opposées que présente sa surface libre suivant la direction de son grand axe.

124. Cas où l'atmosphère n'est pas animée d'un mouvement de rotation. — Nous avons ici $\gamma = 0$, et les équations (3) et (5) des surfaces de niveau et de la surface limite deviennent respectivement

$$\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2\delta - 1) + \frac{2\mu}{r} = C,$$

$$\frac{r}{a^3}(3\cos^2\delta - 1) - \frac{\mu}{r^2} = 0,$$

δ représentant, comme au n° 117, l'angle $\widehat{mOx}$.

Ces deux surfaces, qui sont de révolution autour de Ox, ont un cône asymptote commun représenté par l'équation

$$3\cos^2\delta - 1 = 0,$$

d'où

$$\delta = 54^\circ 44'.$$

En oordonnées rectangulaires, ce cône a pour équation

$$y^2 + z^2 = 2x^2.$$

On trouve facilement, pour la surface libre,

$$C = \frac{3.2^{\frac{1}{3}}.\mu^{\frac{2}{3}}}{a},$$

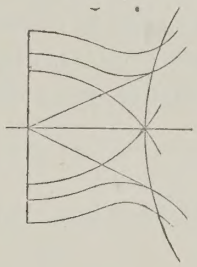
$$R = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}},$$

$$\frac{R''^3}{R^3} + \frac{6R''}{R} - 4 = 0,$$

$$\frac{R''}{R} = 0,626.$$

On reconnaît également que ce cône (*fig.* 17), lieu géométrique aux extrémités de l'axe 2R, est identique au cône asymptotique ci-dessus.

Fig. 17.



125. Application aux phénomènes cométaires. — Une comète, pendant une grande partie de son trajet, marche presque en ligne droite vers le Soleil, mais décrit, dans le voisinage du périhélie, un arc sensiblement circulaire. Dans l'un et l'autre cas, le demi-axe de la surface libre atmosphérique (n^{os} **123** et **124**) sera donné par

$$R = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{2+\gamma}},$$

en supposant $\gamma = 0$ dans la première hypothèse et $\gamma = 1$ dans la seconde. Il est probable que l'allongement, suivant la direction du Soleil, tend à régler l'orientation de la comète de telle manière qu'elle présente constamment la même face au Soleil, par assimilation avec ce qui a lieu pour la Lune par rapport à la Terre.

Quand la comète se rapproche du Soleil, son fluide atmosphérique,

sous l'influence de la quantité de chaleur qu'il reçoit, se dilate progressivement, en même temps que les dimensions de sa surface libre diminuent avec la distance au Soleil. Pour ces deux motifs, le fluide atmosphérique doit s'échapper sous la forme de gerbes ou de *queues* vers les sommets du grand axe. Après le passage au périhélie, a augmente; la seconde cause de la production des queues n'existant plus, ces queues ne subsistent qu'en raison de l'accumulation de la chaleur solaire et de la dilatation qui en résulte dans l'atmosphère cométaire.

D'après cette théorie, l'observation, au lieu d'accuser une seule queue à l'opposé du Soleil, devrait constater l'existence d'une seconde queue, symétrique de la précédente ou dirigée vers cet astre, ce qui ne paraît jamais s'être présenté. Il faut donc que le phénomène dépende d'autres causes que de celle de la gravitation, et c'est ce qui a conduit M. Faye, au sujet de la comète Donati, à se demander si l'on ne pourrait pas se rendre compte des apparences par la considération d'une force répulsive, attribuée aux radiations solaires, et qui aurait pour effet de supprimer la seconde queue; c'est ce que nous allons maintenant étudier avec E. Roche.

§ II. — Des atmosphères cométaires dans l'hypothèse d'une force répulsive.

126. Dans ce qui suit, nous conserverons les notations du paragraphe précédent, en supposant, selon les cas, $n = 0$ ou $\gamma = 0$. Nous admettrons que la force répulsive varie en raison inverse du carré de la distance, qu'elle est proportionnelle aux masses, mais qu'elle est d'autant plus grande que la densité de la matière sur laquelle elle agit est plus faible; l'accélération qu'elle produit sur m peut donc se représenter par $-\varphi \frac{M'}{\overline{M'm}^2}$ (*fig.* 15), en désignant par φ un facteur qui varie en sens inverse de la densité de la matière ci-dessus et que l'on devra considérer comme nul pour le noyau cométaire dont la densité est très grande.

Si la force répulsive agit avec la même intensité dans toute l'étendue de l'atmosphère, le coefficient φ est constant et le travail élémentaire $-\varphi \frac{M'}{\overline{M'm}^2} d\overline{M'm}$ est une différentielle exacte; il n'en serait plus de même

si φ variait avec r et δ; mais, le travail total des forces n'étant plus une fonction des coordonnées, il n'y aurait plus de surfaces de niveau, l'équilibre serait impossible, et le problème proposé serait sans objet : c'est pourquoi nous supposerons dorénavant que φ est constant.

127. Équations des surfaces de niveau et de la surface limite. — L'équation générale des surfaces de niveau sera

$$(1-\varphi)\frac{M'}{\overline{M'm}} - \frac{M'x}{a^2} + \frac{M}{r} = C$$

ou

$$(1-\varphi)\left(\frac{M'}{\overline{M'm}} - \frac{M'x}{a^2}\right) + \frac{M}{r} - \varphi\frac{M'x}{a^2} = C$$

et, en remplaçant le coefficient de $(1-\varphi)$ par la valeur approchée (b') que nous avons obtenue au n° **117**,

$$(1)\qquad (1-\varphi)\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2\delta - 1) + \frac{2\mu}{r} - 2r\varphi\frac{\cos\delta}{a^2} = C.$$

On déduit de là, pour l'équation de la surface limite,

$$(2)\qquad (1-\varphi)\frac{r}{a^3}(3\cos^2\delta - 1) - \frac{\mu}{r^2} - \varphi\frac{\cos\delta}{a^2} = 0,$$

et l'on aura, pour les points de l'atmosphère intérieurs à cette surface,

$$(3)\qquad (1-\varphi)\frac{r}{a^3}(3\cos^2\delta - 1) - \frac{\mu}{r^2} - \varphi\frac{\cos\delta}{a^2} < 0.$$

Les surfaces de niveau et la surface limite étant de révolution autour de Ox, la discussion devra uniquement porter sur une section méridienne, qui sera, si l'on veut, celle que détermine le plan zOx.

128. Discussion du méridien limite. — Supposons d'abord $\varphi < 1$, et soient (*fig.* 18) A′, A les points où la courbe limite coupe Ox entre O et le Soleil et de l'autre côté du point O; $r' = OA'$, $r_1 = OA$ les valeurs déduites de l'équation (2) pour $\delta = 0$, $\delta = \pi$; on a

$$(4)\qquad \begin{cases} 2(1-\varphi)r'^3 - \varphi a r'^2 - \mu a^3 = 0, \\ 2(1-\varphi)r_1^3 + \varphi a r_1^2 - \mu a^3 = 0, \end{cases}$$

équations qui n'ont chacune qu'une racine positive et qui donnent par soustraction

$$2(1-\varphi)(r'^3-r_1^3)=\varphi a(r'^2+r_1^2),$$

ce qui exige que $r'>r_1$ ou $OA'>OA$.

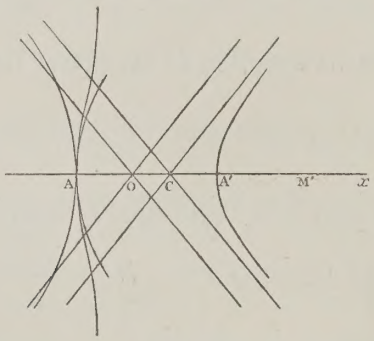
On reconnaît facilement que :

1° La courbe a deux asymptotes correspondant aux valeurs $\cos\delta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, qui se coupent en un point C situé entre O et A′ et déterminé par

$$OC=\frac{\varphi a}{4(1-\varphi)};$$

2° Les rayons vecteurs parallèles à ces asymptotes ne rencontrent pas la branche de courbe qui passe par le point A′, mais l'autre branche.

Fig. 18.



En faisant croître φ jusqu'à l'unité, C s'éloigne indéfiniment dans la direction du Soleil et la branche qui passe par A′ s'évanouit.

Si φ est assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré et le produit par μ, les équations (4) donnent approximativement

$$(5)\qquad r'=a\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}}+\frac{\varphi a}{6},\quad r_1=a\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}}-\frac{\varphi a}{6}.$$

Dans le cas où φ, n'étant plus très petit, va en croissant sans atteindre l'unité, on voit sans peine que la racine positive de la première

des équations (4) est supérieure à

$$\frac{\varphi a}{2(1-\varphi)},$$

quantité de l'ordre a, c'est-à-dire très grande par rapport aux dimensions de l'atmosphère cométaire. La racine positive de la seconde des mêmes équations est très sensiblement égale à cette limite lorsque, μ étant très petit, φ a une valeur sensible. Il suit de là que, si φ augmente, la branche qui passe par A s'éloigne rapidement et n'existe pour ainsi dire plus, en raison de son grand éloignement, pour une valeur finie de φ; mais il existe du côté opposé une branche qui est la limite de l'atmosphère.

Si $\varphi = 1$, l'équation (2) devient

$$r^2 \cos\delta + \mu a^2 = 0;$$

la courbe limite est formée d'une seule branche située à gauche de l'axe Oz qu'elle a pour asymptote et coupe Ox à la distance $a\sqrt{\mu}$ de l'origine.

Lorsque $\varphi > 1$, la branche limite située à gauche subsiste seule et coupe Oz en deux points symétriques déterminés par

$$r = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{\varphi - 1}}.$$

129. Discussion des lignes de niveau. — L'équation (1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$(1-\varphi)(3\cos^2\delta - 1)r^3 - 2\varphi a r^2 \cos\delta + 2\mu a^3 = Ca^3 r. \tag{6}$$

Supposons d'abord que φ soit très petit et considérons les lignes de niveau qui passent par A et A′. La constante C se déterminera en donnant à r, dans l'équation (2), la seconde ou la première des valeurs approchées (5) qui se rapportent respectivement aux suppositions $\delta = \pi$, $\delta = 0$. On trouve ainsi

$$\left\{\begin{array}{l}(1-\varphi)(3\cos^2\delta - 1)r^3 - 2\varphi a r^2 \cos\delta + 2\mu a^3 \\ \quad = \left[6a^2(1-\varphi)\sqrt[3]{\dfrac{\mu^2}{4}} + 2\varphi a^2 \sqrt[3]{\dfrac{\mu}{2}}\right] r\end{array}\right. \tag{7}$$

pour l'équation de la courbe qui passe par le point A, et

$$(8)\qquad \begin{cases} (1-\varphi)(3\cos^2\delta-1)r^3-2\varphi a r^2\cos\delta+2\mu a^3 \\ \quad=\left[6a^2(1-\varphi)\sqrt[3]{\frac{\mu^2}{4}}-2\varphi a^2\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}}\right]r \end{cases}$$

pour celle de la courbe qui passe par le point A'.

La seconde des courbes représentées par les équations (7) et (8) est extérieure à la première; en effet, comme toutes les courbes de niveau, elles ne se coupent pas, et la seconde rencontre Oz; car, si l'on désigne respectivement par r_0 et R_0 les valeurs de r dans les équations (7) et (8) qui correspondent à $\delta=\frac{\pi}{2}$, on obtient par soustraction

$$(1-\varphi)(R_0^2-r_0^2)+6(R_0-r_0)(1-\varphi)a^2\sqrt[3]{\frac{\mu}{4}}=2(R_0+r_0)\varphi a^2\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}},$$

d'où

$$R_0>r_0.$$

La forme de ces courbes se déduit des deux théorèmes suivants :

1° *Une courbe de niveau quelconque est tangente au rayon vecteur en chacun de ses points de rencontre avec la courbe limite.*

Car, si $V=C$ est l'équation générale des courbes de niveau, on a

$$\frac{dr}{d\delta}=-\frac{\frac{dV}{d\delta}}{\frac{dV}{dr}},$$

et, comme $\frac{dV}{dr}=0$ pour la courbe limite, l'expression précédente est infinie pour les intersections de cette courbe avec une courbe de niveau, ce qui démontre le théorème énoncé.

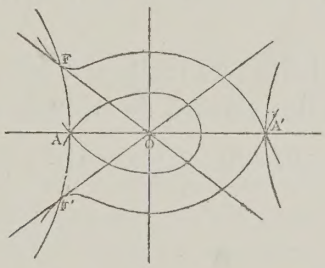
2° *Si l'une de ces intersections se trouve sur l'axe* Ox, *il passe par ce point deux branches de la courbe de niveau, et la surface correspondante y affecte la forme conique.*

Car, pour $\delta=0$, $\delta=\pi$, la dérivée par rapport à δ du premier membre de l'équation (1) est nulle, ou $\frac{dV}{d\delta}=0$; comme on a aussi

$\frac{dV}{dr} = 0$, la dérivée $\frac{dr}{d\delta}$ est indéterminée, et le point considéré est double ou multiple.

Il suit de là (*fig.* 19) que la courbe de niveau passant par le point A se partage en ce point en deux branches infinies et reste fermée entre A et A′; que la courbe de niveau passant par A′ se bifurque de la même

Fig. 19.



manière que ci-dessus en ce point et s'ouvre au delà de ses intersections F, F′ avec la courbe limite, points où elle est tangente aux rayons vecteurs.

Ses surfaces de niveau correspondant à ces deux courbes sont : l'une fermée, sauf en A, et c'est la véritable surface libre; l'autre, se transformant au point conique A′ en une nappe indéfinie, s'entr'ouvre du côté opposé en F, F′, pour s'étendre indéfiniment. Si ces deux surfaces ne sont pas trop éloignées l'une de l'autre, elles pourront contenir une couche de niveau, entretenue par la dilatation continue du fluide atmosphérique qui s'écoulera, d'une part, par l'ouverture (F, F′) pour former une *queue* et, de l'autre, en A′ vers le Soleil pour déterminer un jet secondaire ou *aigrette*.

On reconnaîtra sans peine que, tant que φ est très petit, les courbes de niveau ont des asymptotes parallèles à celles des courbes limites; mais, dès que φ prend une valeur suffisamment grande, les asymptotes sont très éloignées et n'existent plus, pour ainsi dire; les droites correspondant à $\cos\delta = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ continuent à définir les branches indéfinies.

Si $\varphi = 1$, l'équation des courbes de niveau peut se mettre sous la forme

$$r = \frac{-Ca^2 \pm \sqrt{C^2a^4 + 16\mu a^2\cos\delta}}{4\cos\delta},$$

et, pour obtenir des courbes fermées, il faut prendre le signe supérieur du radical, puisqu'elles doivent couper les axes coordonnés, notamment Oz, à des distances finies de l'origine. Les intersections avec Ox sont données par

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{C^2a^4 + 16\mu a^2} - \frac{Ca^2}{4}, \quad \text{pour } \delta = 0,$$

$$r = -\frac{1}{4}\sqrt{C^2a^4 - 16\mu a^2} + \frac{Ca^2}{4}, \quad \text{pour } \delta = \pi.$$

La seconde de ces valeurs sera réelle si $C^2a^2 > 16\mu$; les courbes fermées correspondent à des valeurs de C décroissantes depuis l'infini jusqu'à $C = \frac{4}{a}\sqrt{\mu}$, et, pour cette valeur extrême, on a

$$r = \frac{Ca^2}{4} = a\sqrt{\mu} = OA,$$

rayon vecteur de la surface libre.

Lorsque $\varphi > 1$, on a également, vers le point A, une ouverture qui peut donner naissance à une queue.

En résumé, l'hypothèse d'une force répulsive très petite suffit pour expliquer la formation d'une queue et d'une aigrette; mais, dès qu'elle devient comparable à l'attraction due à la gravitation, la queue disparaît, et il ne reste plus qu'une queue opposée au Soleil. Les figures géométriques résultant de la théorie exposée ci-dessus sont en quelque sorte les esquisses des formes observées, et cet accord est d'autant plus frappant que nous avons supposé que l'atmosphère cométaire est en équilibre, tandis que, en réalité, elle est en mouvement.

CHAPITRE VII.

DES OSCILLATIONS DE LA MER ET DE L'ATMOSPHÈRE.

§ I. — Équations générales des petites oscillations de la mer.

130. Sous l'action du Soleil et de la Lune, la mer, en raison de la différence des accélérations imprimées à chacune de ses molécules et au centre de la Terre, se met en mouvement relatif par rapport au noyau terrestre tournant autour de son axe, sur lequel elle forme une couche dont l'épaisseur est une très petite fraction de son rayon. Les oscillations résultant de ce mouvement, connues sous les noms de *flux* et de *reflux* de la mer, quoique très sensibles dans les ports de l'Océan, ont cependant, comparativement aux dimensions de la Terre, une très petite amplitude, en raison même de la faible intensité des forces qui les produisent. Le phénomène est d'ailleurs compliqué par l'influence de l'inertie de la mer, des forces apparentes dans le mouvement relatif, de la variation de la pesanteur résultant de la déformation variable de la figure de la couche liquide, des frottements, des pertes de force vive dues aux inégalités que présente le fond de la mer ou aux changements brusques de section de la masse fluide lors de son passage dans les canaux qui font communiquer les ports avec la masse principale de l'Océan. C'est à ces pertes de force vive, dont il paraît à peu près impossible de tenir compte dans les recherches analytiques sur les marées, que l'on doit attribuer ce retard, sensiblement constant pour chaque port, de la marée sur le passage au méridien de la Lune, dont l'influence sur la production du phénomène est essentiellement prédominante sur celle du Soleil. On sait que ce retard a reçu le nom d'*établissement du port*. Quant aux frottements, comme il s'agit ici de mouvements très lents, on pourrait, à la rigueur, admettre qu'ils sont pro-

portionnels à la simple vitesse; mais on en fait généralement abstraction dans les recherches analytiques sur les marées, recherches qui ne sont dès lors que de pures conceptions théoriques, ayant surtout pour objet de faire ressortir l'influence considérable des résistances que l'on néglige.

Malgré ces simplifications, le problème des marées présente de très grandes difficultés, qui n'ont pu être surmontées que dans quelques cas particuliers, en se donnant à l'avance une loi de profondeur qui ne peut pas être celle de la nature et en remarquant que la partie des oscillations dépendant de l'état primitif de la mer a dû bientôt disparaître, par suite de la résistance que les eaux éprouvent dans leurs mouvements; de sorte que, sans l'action du Soleil et de la Lune, la mer serait depuis longtemps parvenue à un état d'équilibre permanent, dont les deux astres tendent sans cesse à l'écarter. On n'a donc qu'à déterminer les oscillations qui dépendent de cette action, conformément au principe suivant, posé par Laplace : *L'état d'un système de corps dans lequel les conditions initiales du mouvement ont disparu, par suite des résistances développées dans le mouvement, est périodique, comme les forces qui sollicitent le système.*

131. Des petits mouvements d'un fluide recouvrant un noyau sphéroïdal. — Nous admettrons que le noyau a été primitivement fluide et formé de couches homogènes, peu différentes de la forme sphérique; qu'il a été uniquement soumis à ses attractions mutuelles et à la force centrifuge, et que sa force générale est une figure d'équilibre, en négligeant ainsi l'action de la masse fluide qui le recouvre, soit en raison de l'épaisseur, censée très faible, de la couche liquide qui est en contact avec lui et qui, à l'origine, se trouvait à l'état de vapeur, soit aussi parce que la densité de la masse gazeuse ou atmosphère, juxtaposée à la couche précédente, est relativement très petite.

Quant à l'atmosphère, nous pourrons la considérer fictivement, au point de vue du problème qui nous occupe, comme étant limitée par une certaine surface de niveau (S), peu différente de la sphère, au delà de laquelle la densité du fluide pourra être négligée.

Par ce qui précède, nous voyons que nous rentrons dans les conditions de la question du n° **101**, en supposant le sphéroïde limité par (S); les

surfaces de niveau, de la catégorie dont nous avons à tenir compte, sont alors des ellipsoïdes de révolution, peu aplatis suivant la ligne des pôles.

Soient (*fig.* 20)

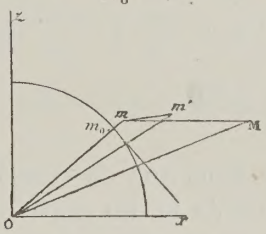
O le centre de la sphère dont diffère peu la surface du noyau sphéroïdal;

n la vitesse angulaire de la masse totale autour de la ligne des pôles Oz;

a' le rayon moyen de la surface de niveau qui passe par le point m de la masse fluide;

$r = a' + w_0$ le rayon vecteur Om, rencontrant en m_0 la sphère de rayon a';

Fig. 20.



θ la colatitude du point m et ϖ sa longitude estimée dans le sens de la rotation n;

g la pesanteur absolue de m ou l'attraction de la masse limitée par (S) sur ce point. Cette pesanteur peut être considérée comme constante pour tous les points de la surface de niveau passant par m, aux termes en w_0 près, qui sont censés très petits;

ρ la densité du fluide en m rapportée à la densité moyenne du sphéroïde prise pour unité;

p la pression correspondante.

Sous l'action d'astres plus ou moins éloignés du noyau sphéroïdal, la masse m éprouvera lentement un déplacement mm' qui restera très petit, quel que soit le temps écoulé. Soient w la projection de $m_0 m'$ sur Om_0; u, v les projections de mm' sur la méridienne sphérique de m_0, dirigées respectivement suivant l'équateur, et la tangente au parallèle en m_0 menée dans le sens de la rotation n. Nous négligerons les termes du second ordre en w_0, w, u, v, y compris leurs dérivées.

Le rayon vecteur r et les angles θ et ϖ sont devenus, pour la position m',

$$r' = a' + w, \quad \theta' = \theta + \frac{u}{r}, \quad \varpi' = \varpi + \frac{v}{r \sin\theta}.$$

Si m fait partie d'une atmosphère, la pression et la densité éprouveront des variations et n'auront pas généralement les mêmes valeurs aux différents points de la couche de niveau déformée.

En se reportant à la théorie des mouvements relatifs, on a, pour les composantes de la force centrifuge composée de m', en y joignant les composantes semblables relatives à l'inertie (1),

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 2n\sin\theta\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{d^2w}{dt^2} \cdots\cdots\cdots\cdots & \text{suivant } w \\ -2n\left(\cos\theta\dfrac{du}{dt} + \sin\theta\dfrac{dw}{dt}\right) - \dfrac{d^2v}{dt^2} \cdots\cdots & \text{» } v \\ 2n\cos\theta\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{d^2u}{dt^2} \cdots\cdots\cdots\cdots & \text{» } u \end{array} \right.$$

Il n'est intéressant pour nous que de suivre une molécule m' sur la surface de niveau déformée de m. En considérant un déplacement infiniment petit de m' sur cette surface, on aura $dr' = dw$, et le travail élémentaire de la première des forces (a) sera du second ordre ou négligeable. Si l'on remarque que $d\theta'$ et $d\varpi'$ ne diffèrent de $d\theta$ et $d\varpi$ que de termes du premier ordre, la somme des travaux élémentaires de la deuxième et de la troisième des forces (a) sera

$$(b) \quad -\left[2n\left(\cos\theta\frac{du}{dt} + \sin\theta\frac{dw}{dt}\right) + \frac{d^2v}{dt^2}\right] a'\sin\theta\, d\varpi + \left(2n\cos\theta\frac{dv}{dt} - \frac{d^2u}{dt^2}\right) a'\, d\theta.$$

Le travail de la pesanteur est

$$(c) \qquad -g\, dw.$$

En considérant n^2, qui est une quantité très petite, comme étant de l'ordre des déplacements, le travail élémentaire de la force centrifuge de m' sera égal à celui de m, ou à

$$(d) \qquad \frac{n^2}{2} d(r^2\sin^2\theta);$$

(1) *Voir* notre *Traité de Mécanique générale*, t. I, Chap. VII de la première Partie.

la différentielle se rapportant au passage du point m a un point infiniment voisin de sa surface de niveau.

Si donc on désigne par p', ρ' la pression et la densité du fluide en m', par dp' l'accroissement de la pression lorsqu'on passe de m' à un point infiniment voisin de la surface de niveau déformée, et enfin par V le potentiel dû à l'action des astres étrangers et à la modification éprouvée par la pesanteur par suite de la déformation des couches de niveau, nous aurons, eu égard aux expressions (b), (c), (d) et en vertu d'un principe connu,

$$-\left[2n\left(\cos\theta\frac{du}{dt}+\sin\theta\frac{dw}{dt}\right)+\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]a'\sin\theta\,d\varpi$$
$$+\left(2n\cos\theta\frac{dv}{dt}-\frac{d^2u}{dt^2}\right)a'\,d\theta-g\,dw+\frac{n^2}{2}d(r^2\sin^2\theta)+dV=\frac{dp'}{\rho'};$$

mais, en supposant que m se déplace sur sa surface de niveau, il vient

$$\frac{n^2}{2}d(r^2\sin^2\theta)-g\,dw_0=0.$$

Si donc on retranche cette dernière équation de la précédente et si l'on désigne par z l'élévation $w-w_0$ positive ou négative de m, dans son déplacement, au-dessus de la surface de niveau, on trouve

$$\text{(A)}\qquad\begin{cases}-\left[2n\left(\cos\theta\dfrac{du}{dt}+\sin\theta\dfrac{dz}{dt}\right)+\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}\right]a'\sin\theta\,d\varpi\\ \qquad+\left(2n\cos\theta\dfrac{dv}{dt}-\dfrac{d^2u}{dt^2}\right)a'\,d\theta-g\,dz+dV=\dfrac{dp'}{\rho'}.\end{cases}$$

A cette équation nous devrions joindre l'équation de continuité, mais nous nous réservons d'établir ultérieurement cette dernière en étudiant les deux cas spéciaux des liquides et des gaz.

132. Équations des petites oscillations de la mer. — Nous prendrons pour unité le rayon moyen a' de la surface d'équilibre de la mer. La profondeur de la mer au point m, que nous désignerons par γ, étant très petite, nous pourrons supposer que les déplacements éprouvés par les molécules situées sur un même rayon, lors de l'équilibre,

sont égaux. La formule (A) nous donne, à la surface de la mer,

$$(a)\qquad \begin{cases} -\left[2n\left(\cos\theta\dfrac{du}{dt}+\sin\theta\dfrac{dz}{dt}\right)+\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\sin\theta\,d\varpi \\ \quad +\left(2n\cos\theta\dfrac{d\varphi}{dt}-\dfrac{d^2u}{dt^2}\right)d\theta-g\,dz+dV=0. \end{cases}$$

La profondeur γ_1 en m' étant égale à la profondeur, correspondant au même rayon lors de l'équilibre, augmentée de z, on a

$$\gamma_1=\gamma+\frac{d\gamma}{d\theta}u+\frac{d\gamma}{d\varpi}\frac{\varphi}{\sin\theta}+z.$$

L'élément superficiel sphérique $-d\cos\theta.d\varpi$, qui se rapporte au point m, devient en m'

$$\begin{aligned} &-\frac{d\cos(\theta+u)}{d\cos\theta}\frac{d}{d\varpi}\left(\varpi+\frac{\varphi}{\sin\theta}\right)d\cos\theta.d\varpi \\ &=-d\cos\theta.d\varpi\left[1+\frac{d(u\sin\theta)}{\sin\theta\,d\theta}+\frac{d\varphi}{\sin\theta\,d\varpi}\right]. \end{aligned}$$

L'équation de continuité s'obtiendra en exprimant que ce dernier élément, multiplié par γ_1, est égal à $-\gamma\,d\cos\theta.d\varpi$, ce qui conduit à

$$(b)\qquad z=-\frac{d(\gamma u\sin\theta)}{\sin\theta\,d\theta}-\frac{d(\gamma\varphi)}{\sin\theta\,d\varpi}.$$

Comme la profondeur γ est très petite, il résulte de cette formule que z est très petit par rapport à u et φ; $\frac{dw}{dt}=\frac{dz}{dt}$ pourra donc être négligé dans le premier terme de l'équation (a), qui se décompose ensuite dans celles-ci :

$$(c)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}-2n\cos\theta\dfrac{d\varphi}{dt}=-g\dfrac{dz}{d\theta}+\dfrac{dV}{d\theta}, \\ \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\cos\theta\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{\sin\theta}\left(-g\dfrac{dz}{d\varpi}+\dfrac{dV}{d\varpi}\right). \end{cases}$$

Si nous posons $\cos\theta=\mu$, les équations (c) et (b) deviennent

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}-2n\mu\dfrac{d\varphi}{dt}=\sqrt{1-\mu^2}\dfrac{d}{d\mu}(gz-V), \\ \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\mu\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\dfrac{d}{d\varpi}(gz-V), \\ z=\dfrac{d(\gamma u\sqrt{1-\mu^2})}{d\mu}-\dfrac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\dfrac{d(\gamma\varphi)}{d\varpi}. \end{cases}$$

Soit

$$z = \Sigma Z_\nu$$

le développement de z en fonctions sphériques.

La portion V'' de V qui se rapporte à l'excès sphéroïdal aqueux, déterminé par la déformation de la surface d'équilibre de la mer, sera donnée par l'équation (14) du n° 80, en y faisant $a = A = 1$, et l'on aura

$$V'' = 4\pi\rho \sum \frac{Z_\nu}{2\nu + 1} = 3g\rho \sum \frac{Z_\nu}{2\nu + 1},$$

en remarquant qu'on peut supposer ici, en négligeant seulement les termes du second ordre,

$$g = \frac{4\pi}{3}.$$

Enfin, si l'on désigne par V' la portion de V relative à l'attraction des astres, il vient

$$(2) \qquad gz - V = g\Sigma Z_\nu \left(1 - \frac{3\rho}{2\nu + 1}\right) - V'.$$

Les équations (1) étant linéaires en u, v, z ou Z_ν et V, on voit que, *si* V' *se compose de plusieurs parties, l'oscillation totale s'obtiendra en faisant la somme des oscillations partielles résultant de chacun des termes de* V', *considérés isolément et successivement*.

En admettant que les frottements du liquide sur lui-même et sur le noyau solide donnent une résultante proportionnelle à la simple vitesse, ce qui ne paraît pas devoir être exact, et en désignant par λ une constante, on devrait ajouter respectivement $\lambda \frac{du}{dt}$, $\lambda \frac{dv}{dt}$ aux premiers membres des deux premières équations (1), ce qui n'altérerait pas la forme linéaire de ces équations. D'après le principe énoncé au n° 130, il n'est pas nécessaire d'obtenir les intégrales générales des équations (1) : il suffit de satisfaire à ces équations pour chacun des termes dont se compose V'.

133. Calcul de l'attraction du Soleil et de la Lune. — Soient

M la masse de l'un ou l'autre de ces astres;

A la distance de son centre à celui de la Terre;

ψ l'ascension droite de ce centre mesurée à partir de l'équinoxe du printemps $O\chi$;

ν sa déclinaison;

$O\eta$ la perpendiculaire à $O\chi$ dans le plan de l'équateur.

La formule (b') du n° 117 nous donne, pour la partie de V′ qui dépend de l'astre considéré,

$$V' = \frac{3}{2}\frac{M}{A^3}(\cos^2 \widehat{mOM} - \tfrac{1}{3}),$$

en faisant abstraction du terme en $\frac{M}{A}$, qui ne jouerait aucun rôle dans les équations (1). Nous mesurons l'angle nt décrit par l'origine Ox de ϖ à partir de $O\chi$; l'angle formé par la projection de Om sur le plan de l'équateur avec $O\chi$ sera $nt - \varpi$, et nous aurons

$$\cos(\widehat{mO\chi}) = \sin\theta\cos(nt-\varpi),\quad \cos(\widehat{mO\eta}) = \sin\theta\sin(nt-\varpi),\quad \cos(\widehat{mOz}) = \cos\theta,$$

$$\cos(\widehat{MO\chi}) = \cos\nu\cos\psi,\quad \cos(\widehat{MO\eta}) = \cos\nu\sin\psi,\quad \cos(\widehat{MOz}) = \sin\nu,$$

par suite, en appliquant une formule connue,

$$\cos\widehat{mOM} = \cos\theta\sin\nu + \sin\theta\cos\nu\cos(nt+\varpi-\psi).$$

On remarquera que $nt + \varpi - \psi$ est l'angle formé par le méridien passant par l'astre avec le méridien du lieu.

Nous avons ainsi

$$(3)\quad \begin{cases} V' = \dfrac{M}{4A^3}[(1+3\cos 2\theta)(\sin^2\nu - \frac{1}{2}\cos^2\nu) \\ \qquad\qquad + 3\sin 2\theta\sin 2\nu\cos(nt+\varpi-\psi) + 3\sin^2\theta\cos^2\nu\cos 2(nt+\varpi-\psi)] \\ \quad = \dfrac{3M}{4A^3}[2(\sin^2\nu - \frac{1}{2}\cos^2\nu)(\mu^2 - \frac{1}{3}) + 2\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin 2\nu\cos(nt+\varpi-\psi) \\ \qquad\qquad + (1-\mu^2)\cos^2\nu\cos 2(nt+\varpi-\psi)]. \end{cases}$$

Cette fonction est une fonction sphérique du second ordre en θ et ϖ, d'après la seconde des formules (E) du n° 85.

Comme elle est périodique, elle pourra se développer en une suite de termes de la forme

$$\chi\cos(it + s\varpi + \zeta),$$

χ étant une fonction de θ, i et ζ deux constantes et s un nombre entier qui ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2. Chacun de ces termes sera évidemment une fonction sphérique du second ordre.

134. Classification des oscillations en trois espèces. — Chacun des trois termes dont se compose V′ donnera lieu à un genre particulier d'oscillations : 1° les oscillations de la première espèce seront, comme le terme correspondant de V′, indépendantes du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même et ne dépendront que du mouvement de l'astre. Comme elles seront très lentes, l'inertie, la force centrifuge composée, les frottements, les chocs, ne joueront qu'un faible rôle; de sorte que les oscillations seront sensiblement les mêmes que si la mer prenait à chaque instant sa forme d'équilibre sous l'action de l'astre et de la pesanteur. Nous avons donc, dans cette hypothèse, quelle que soit la loi de la profondeur,

$$g z - V = 0$$

ou, en vertu de l'équation (2),

$$g \Sigma Z_\nu \left(1 - \frac{3\rho}{3\nu + 1}\right) = \frac{M}{4A^3}(1 + 3\cos 2\theta)(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v);$$

comme le second membre de cette formule est une fonction sphérique du second ordre en θ, l'indice ν ne peut avoir que la valeur 2, et l'on a, par suite,

$$z = Z_2 = \frac{M(1 + 3\cos 2\theta)(\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v)}{4A^3 g(1 - \frac{3}{5}\rho)}. \tag{4}$$

2° Les oscillations de la seconde espèce dépendent essentiellement du mouvement diurne; leur période est d'un jour environ.

3° La période des oscillations de la troisième espèce est à peu près d'une demi-journée.

Nous verrons plus loin que la différence entre les hauteurs de deux marées d'un même jour est due aux oscillations de la seconde espèce, différence qui, d'après l'observation, est très petite.

Les oscillations totales produites par le Soleil sont beaucoup plus faibles que celles qui sont dues à la Lune, en raison de la différence considérable des accélérations relatives de chaque molécule

fluide résultant des attractions de ces deux astres. Le rapport entre les hauteurs des marées lunaire et solaire est environ $\frac{5}{2}$.

135. Loi des oscillations de la mer dans l'hypothèse d'une profondeur uniquement fonction de la latitude. — Considérons le terme

$$\chi \cos(it + s\varpi + \zeta)$$

du développement de V'. Dans l'hypothèse actuelle, on satisfera aux équations (1) en y remplaçant u et les fonctions Z_ν par des termes en $\cos(it + s\varpi + \zeta)$, ayant pour coefficients des fonctions de μ, et v par un terme en $\sin(it + s\varpi + \zeta)$, affecté d'un coefficient également fonction de μ. Le temps disparaîtra et il restera des équations différentielles qui permettront de déterminer ces différents coefficients.

Nous poserons donc

$$\begin{aligned} z &= a\cos(it + s\varpi + \zeta), \\ u &= b\cos(it + s\varpi + \zeta), \\ v &= c\sin(it + s\varpi + \zeta), \\ z - \frac{V}{g} &= a'\cos(it + s\varpi + \zeta), \end{aligned}$$

a, b, c, a' étant des fonctions de μ. La substitution de ces valeurs dans la troisième, la première et la deuxième des équations (1) conduit à

$$\begin{aligned} a &= \frac{d(\gamma b\sqrt{1-\mu^2})}{d\mu} - \frac{s\gamma c}{\sqrt{1-\mu^2}}, \\ i^2 b + 2nic\mu &= -g\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{da'}{d\mu}, \\ i^2 c + 2nib\mu &= -\frac{gsa'}{\sqrt{1-\mu^2}}. \end{aligned}$$

Des deux dernières de ces nouvelles équations on déduit

$$\begin{aligned} b &= -\frac{g(1-\mu^2)\frac{da'}{d\mu} + \frac{2ngs}{i}\mu a'}{(i^2 - 4n^2\mu^2)\sqrt{1-\mu^2}}, \\ c &= \frac{2ng\mu(1-\mu^2)\frac{da'}{d\mu} - gsa'}{(i^2 - 4n^2\mu^2)\sqrt{1-\mu^2}}. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans la première des mêmes équations et posant, pour abréger,

$$(\alpha) \qquad \gamma' = \frac{\gamma}{i^2 - 4n^2\mu^2},$$

on trouve

$$(5) \quad \begin{cases} a = g\dfrac{d}{d\mu}\left\{\gamma'\left[\dfrac{2ns}{i}\mu a' - (1-\mu^2)\dfrac{da'}{d\mu}\right]\right\} \\ \qquad + \dfrac{2ngs\mu\gamma'}{i(1-\mu^2)}\left[\dfrac{2ns\mu a'}{i} - (1-\mu^2)\dfrac{da'}{d\mu}\right] + s^2 g\,\dfrac{\gamma' a'(i^2 - 4n^2\mu^2)}{i^2(1-\mu^2)}. \end{cases}$$

On remarquera, en raison de la signification de γ', que si

$$\frac{2ns\mu a'}{i} - (1-\mu^2)\frac{da'}{d\mu}$$

est divisible par le facteur $(i^2 - 4n^2\mu^2)$, la valeur de a ne renfermera pas ce facteur en dénominateur.

136. Examen du cas où, la profondeur de la mer étant supposée constante, on ferait abstraction de la rotation de la Terre. — On a

$$n = 0, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{i^2},$$

$$i^2 a = \gamma g\left[-\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{da'}{dt} + \frac{s^2 a'}{1-\mu^2}\right].$$

De la formule (2) nous déduirons, en nous rappelant que $\nu = 2$,

$$a' = a\left(1 - \tfrac{3}{5}\rho\right) - \frac{\zeta}{g}.$$

D'autre part, l'équation (5) du n° 73 donne, en exprimant qu'elle est satisfaite par $a'\cos(it + s\varpi + \zeta)$,

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{da'}{d\mu}\right] - \frac{s^2 a'}{1-\mu^2} + 6a' = 0.$$

Nous avons donc

$$i^2 a = 6\gamma g a' = 6\gamma g\left(1 - \tfrac{3}{5}\rho\right)a - 6\gamma\zeta,$$

d'où

$$a = \frac{6\gamma\zeta}{6\left(1 - \frac{3}{5}\rho\right) - i^2}.$$

§ II. — DES OSCILLATIONS DE LA MER DANS L'HYPOTHÈSE OU ELLE RECOUVRIRAIT COMPLÈTEMENT UN ELLIPSOIDE DE RÉVOLUTION PEU DIFFÉRENT D'UNE SPHÈRE.

137. La surface d'équilibre de la mer étant elle-même une surface de révolution peu différente d'une sphère, la profondeur est de la forme

$$\gamma = l(1 - q\mu^2),$$

l étant la profondeur à l'équateur et q une constante. On a, par suite,

$$\gamma' = \frac{l(1 - qn^2)}{i^2 - 4n^2\mu^2}.$$

138. Des oscillations de la première espèce. — On a $s = 0$, $\chi = k(\mu^2 - \frac{1}{3})$, en désignant par k une constante. L'équation (5) se réduit à

$$a = -gl\frac{d}{d\mu}(1 - q^2\mu^2)\frac{1 - \mu^2}{i^2 - 4n^2\mu^2}\frac{da'}{d\mu}. \tag{5'}$$

Supposons que a soit représenté par une somme finie de $\nu + 1$ fonctions sphériques de μ seul, d'ordre pair, et posons

$$a = Y_0 + Y_2 + \ldots + Y_{2\nu}.$$

D'après la première des formules (A) du n° 84 et la formule (D) du n° 85, la fonction $Y_{2\nu}$ est de la forme

$$Y_{2\nu} = A_{2\nu}X_{2\nu} = \frac{A_{2\nu}}{2^{2\nu}.1.2.3\ldots 2\nu}\frac{d^{2\nu}(\mu^2 - 1)^{2\nu}}{d\mu^{2\nu}}.$$

$A_{2\nu}$ étant une constante arbitraire; cette fonction est du degré 2ν, et nous rappellerons que χ est une fonction de même nature que Y_2.

De l'équation (2) on déduit

$$a' = \sum_{\nu=0}^{\nu}\left(1 - \frac{3\rho}{4\nu + 1}\right)Y_{2\nu} - \frac{k}{g}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}). \tag{2'}$$

Soit $G\mu^{2\nu}$ le terme du degré le plus élevé de $Y_{2\nu}$ ou de a; le terme correspondant de a' sera

$$G\left(1 - \frac{3\rho}{4\nu + 1}\right)\mu^{2\nu}$$

et celui de

$$-(1-\mu^2)\frac{da'}{d\mu}$$

aura pour expression

$$(d) \qquad G\left(1-\frac{3\rho}{4\nu+1}\right)2\nu\mu^{2\nu+1}.$$

Au lieu de supposer que le coefficient q est donné, considérons ce coefficient comme indéterminé et assujettissons $(\nu+1)$ constantes arbitraires A_ν à satisfaire à la condition que

$$(1-\mu^2)\frac{da'}{d\mu}$$

soit divisible par $(i^2-4n^2\mu^2)$; on établira ainsi une relation entre ces constantes et q. En identifiant ensuite les fonctions semblables des deux membres de l'équation (5'), on obtiendra $\nu+1$ nouvelles relations qui, avec la précédente, permettront de déterminer q et les G.

Supposons que l'on ait effectué la division dans l'équation (5'), le coefficient du terme du second membre ou en $\mu^{2\nu}$ sera

$$G\nu(2\nu+1)\left(1-\frac{3\rho}{4\nu+1}\right)\frac{lgq}{2n^2},$$

et, comme il doit être égal à G, il vient

$$q=\frac{2n^2}{\nu(2\nu+1)\left(1-\frac{3\rho}{4\nu+1}\right)lg}.$$

L'identification des autres termes de l'équation (5'), jointe à la condition de divisibilité par $i^2-4n^2\mu^2$, fera connaître les coefficients inconnus de z ou a et, par conséquent, les oscillations qui dépendent du terme $k\cos(it+\zeta)$ de l'attraction.

Le rapport $\frac{n^2}{g}$ de la force centrifuge à la pesanteur, à l'équateur, n'étant que $\frac{1}{289}$, on voit qu'en prenant pour ν un nombre tel que 12 ou 15, la quantité q sera assez petite pour pouvoir être négligée, et l'on aura approximativement la loi des oscillations de la mer dans le cas d'une profondeur constante.

Le terme de V', correspondant à la rétrogradation de la ligne des

nœuds de la Lune, donnera pour b (n° 135) une grande valeur, en raison de la petitesse du coefficient i, qui entre en dénominateur dans l'expression de cette fonction.

Mais nous n'aurons pas, dans la suite, à tenir compte de la solution précédente, puisque, au n° 134, nous avons donné la loi des oscillations de la première espèce, indépendamment de la loi de la profondeur de la mer.

139. Des oscillations de la seconde espèce. — On a $s=1$, $\chi = k\mu\sqrt{1-\mu^2}$. L'équation (5) devient

$$(5'')\quad \begin{cases} a = gl\dfrac{d}{d\mu}\left\{\dfrac{1-q\mu^2}{i^2-4n^2\mu^2}\left[\dfrac{2n}{i}\mu a' - (1-\mu^2)\dfrac{da'}{d\mu}\right]\right\} \\ \qquad + \dfrac{2ngl(1-q^2\mu^2)}{i(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)}\left[\dfrac{2n\mu a'}{i} - (1-\mu^2)\dfrac{da'}{d\mu}\right] + \dfrac{gl(1-q\mu^2)a}{i^2(1-\mu^2)}. \end{cases}$$

Considérons le terme de l'expression (D) du n° 85 qui correspond à $m=1$ et à ν, en y faisant

$$A_\nu^{(1)}\cos\varpi + B_\nu^{(1)}\sin\varpi = A_\nu\cos(nt+\varpi+\zeta),$$

A_ν étant une constante arbitraire. Le coefficient du cosinus, eu égard à la formule (A) du n° 84, sera

$$Q_\nu = A_\nu\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{dX_\nu}{d\mu} = \frac{A_\nu\sqrt{1-\mu^2}}{2^\nu.1.2.3\ldots(\nu+1)}\,\frac{d^{\nu+1}(\mu^2-1)^\nu}{d\mu^{\nu+1}}$$

ou simplement

$$Q_\nu = A_\nu\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{d^{\nu+1}(\mu^2-1)^\nu}{d\mu^{\nu+1}},$$

en faisant rentrer le dénominateur dans la constante A_ν.

On voit ainsi que Q_ν est égal à $A_\nu\sqrt{1-\mu^2}$ multiplié par un polynôme de degré $(\nu-1)$.

Supposons maintenant que a soit de la forme

$$a = Q_2 + Q_4 + \ldots + Q_{2\nu};$$

l'équation (2) nous donnera

$$a' = \sum_1^\nu\left(1-\frac{3\rho}{4\nu+1}\right)Q_{2\nu} - \frac{k}{g}\mu\sqrt{1-\mu^2}.$$

Si nous représentons par $G\sqrt{1-\mu^2}\,\mu^{2\nu-1}$ le terme du degré le plus élevé dans $Q_{2\nu}$ ou a, le terme correspondant de a' est

$$G\left(1-\frac{3\rho}{4\nu+1}\right)\sqrt{1-\mu^2}\,\mu^{2\nu-1}$$

et celui de

$$\frac{2n\mu a'}{i}-(1-\mu^2)\frac{da'}{d\mu}$$

a pour expression

$$2G\left(1-\frac{3\rho}{4\nu+1}\right)\sqrt{1-\mu^2}\,\mu^{2\nu}\left(\frac{n}{i}+\nu-1\right).$$

En suivant la voie tracée au numéro précédent, nous déterminerons q en exprimant que

$$\frac{1}{i^2-4n^2\mu^2}\left[\frac{2n\mu a'}{i}-(1-\mu^2)\frac{da'}{d\mu}\right]$$

est un polynôme. En supposant la division effectuée, on trouve, pour le terme du degré le plus élevé du quotient,

$$-\frac{G}{2n^2}\left(1-\frac{3\rho}{4\nu+1}\right)\left(\frac{n}{i}+\nu-1\right)\sqrt{1-\mu^2}\,\mu^{2\nu-2}.$$

On obtient enfin, pour le terme semblable du second terme de l'équation (5″),

$$G\frac{lgq}{2n^2}\left(2\nu^2+\nu+\frac{n}{i}\right)\left(1-\frac{3\rho}{4\nu+1}\right)\sqrt{1-\mu^2}\,\mu^{2\nu-1},$$

et, en l'égalant au terme correspondant de a, il vient

$$q=\frac{2n^2}{lg\left(1-\frac{3\rho}{4\nu+1}\right)\left(2\nu^2+\nu+\frac{n}{i}\right)}.$$

Pour que cette loi de profondeur soit admissible, il faut qu'elle soit indépendante des termes du développement de V′ ou que l'on ait $i=n$, ce que l'on peut admettre sans inconvénient, attendu que i diffère très peu de n.

Si l'on prend ν assez grand pour que $\frac{n}{i}$ soit négligeable devant $2\nu^2+\nu$, on retombe sur la loi de profondeur du numéro précédent.

140. De la différence entre deux marées d'un même jour. — Si nous supposons $i = n$, $\nu = 1$, nous avons

$$a = Q_2 = A_2 \mu \sqrt{1-\mu^2},$$

$$a' = (1 - \tfrac{3}{5}\rho) Q_2 - \frac{k}{g} \mu \sqrt{1-\mu^2} = \left[(1 - \tfrac{3}{5}\rho) A_2 - \frac{k}{g} \right] \mu \sqrt{1-\mu^2},$$

$$\frac{2n}{i} \mu a' - (1-\mu^2) \frac{da'}{d\mu} = - \frac{1 - 4\mu^2}{\mu} a'.$$

Le second membre de l'équation (5″) se réduit à

$$\frac{2 lgqa'}{n^2} = \frac{2 lgq}{n^2} \left[(1 - \tfrac{3}{5}\rho) A_2 - \frac{k}{g} \right] \mu \sqrt{1-\mu^2},$$

et, en l'identifiant au premier, c'est-à-dire à $A_2 \mu \sqrt{1-\mu^2}$, on trouve

$$A_2 = \frac{2 lqk}{2 lgq (1 - \tfrac{3}{5}\rho) - n^2}.$$

Le terme de z qui dépend de

$$k \mu \sqrt{1-\mu^2} \cos(it + \varpi + \zeta)$$

sera donc

$$\frac{2 lg \mu \sqrt{1-\mu^2}}{2 lgq (1 - \tfrac{3}{5}\rho) - n^2} k \cos(it + \varpi + \zeta).$$

Mais, en se reportant à l'équation (3), on voit que la somme des termes $k \cos(it + \varpi + \zeta)$ n'est autre chose que

$$\frac{3}{2} \frac{M}{A^3} \sin 2\nu . \mu \sqrt{1-\mu^2} \cos(nt + \varpi - \psi).$$

Nous avons donc, pour la valeur totale de z, qui se rapporte aux oscillations de la seconde espèce,

$$z = \frac{6M}{A^3} \frac{lq \sin\theta \cos\theta \sin\nu \cos\nu \cos(nt + \varpi - \psi)}{2 lgq (1 - \tfrac{3}{5}\rho) - n^2},$$

quelle que soit la valeur de la constante, et les oscillations seront nulles si $q = 0$ ou si la profondeur est constante.

La différence des deux marées d'un même jour dépend des oscillations de la seconde espèce. En effet, en raison de la signification de $nt + \varpi - \psi$ (n° 133), selon que M passe au méridien supérieur du lieu

ou au méridien inférieur, on a

$$nt + \varpi - \psi = 0, \quad nt + \varpi - \psi = 180^\circ.$$

Pour ces valeurs, l'excès de la première marée sur l'autre est

$$\frac{12\,M}{A^3}\,\frac{lq\sin\theta\cos\theta\sin v\cos v}{2lgq(1-\frac{3}{5}\rho)-n^2}.$$

D'après l'observation, cette différence est très petite, ou lq est très petit, ou encore la profondeur de la mer est sensiblement constante. Le dénominateur de la fraction précédente étant alors négatif, si, comme paraît l'indiquer l'observation, la marée due au passage supérieur de l'astre l'emporte sur l'autre, q sera négatif et la mer sera plus profonde aux pôles qu'à l'équateur. Mais il ne faut pas perdre de vue que cette conséquence est subordonnée à l'hypothèse que la mer recouvre complètement un solide de révolution, ce qui n'est pas le cas de la nature.

En portant la valeur de A_2 dans l'expression ci-dessus de a' et dans celles de b, c du n° **135**, où l'on fera $s = 1$, on trouve

$$a' = \frac{n^2\frac{k}{g}\mu\sqrt{1-\mu^2}}{2lgq(1-\frac{3}{5}\rho)-n^2}, \quad b = \frac{-k}{2lgq(1-\frac{3}{5}\rho)-n^2}, \quad c = \frac{k\mu}{2lgq(1-\frac{3}{5}\rho)-n^2},$$

et, par suite,

$$u = -\frac{3M}{A^3}\,\frac{\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi)}{2lgq(1-\frac{3}{5}\rho)-n^2},$$

$$v = \frac{3M}{A^3}\,\frac{\cos\theta\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi)}{2lgq(1-\frac{3}{5}\rho)-n^2},$$

ce qui complète la solution du problème.

141. Des oscillations de la troisième espèce. — Dans ce cas, on a $s = 2$, $\chi = k(1-\mu^2)$, et l'équation (5) devient

$$(5''') \quad \left\{\begin{aligned} a = {} & gl\frac{d}{d\mu}\left\{\frac{1-q\mu^2}{i^2-4n^2\mu^2}\left[\frac{4n}{i}\mu a' - (1-\mu^2)\frac{da'}{d\mu}\right]\right\} \\ & + \frac{4ngl(1-q\mu^2)}{i(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)}\left[\frac{4n\mu a'}{i} - (1-\mu^2)\frac{da'}{d\mu}\right] \\ & + \frac{4gl(1-q\mu^2)a'}{i^2(1-\mu^2)}. \end{aligned}\right.$$

Considérons le terme de l'expression (D) du n° 85 qui correspond à $m = 2$ et à ν, en y faisant

$$A_\nu^{(2)} \cos 2\varpi + B_\nu^{(2)} \sin 2\varpi = A_\nu \cos(nt + 2\varpi + \zeta).$$

Le coefficient du cosinus sera, en ayant égard à la formule (A) du n° 84,

$$Q_\nu = A_\nu (1 - \mu^2) \frac{d^2 X_\nu}{d\mu^2} = \frac{A_\nu (1 - \mu^2)}{2^\nu . 1 . 2 . 3 \ldots \nu} \frac{d^{\nu+2} (\mu^2 - 1)^\nu}{d\mu^{\nu+2}}$$

ou simplement

$$Q_\nu = A_\nu (1 - \mu^2) \frac{d^{\nu+2} (\mu^2 - 1)^\nu}{d\mu^{\nu+2}} = (1 - \mu^2) P_{\nu-2},$$

P_ν étant un polynôme du degré $(\nu - 2)$ affecté d'un coefficient arbitraire.

Supposons que a soit de la forme

$$a = (1 - \mu^2)(P_0 + P_2 + \ldots + P_{2\nu-2});$$

l'équation (2) nous donnera

$$a' = (1 - \mu^2) \left[\sum_{\nu=1}^{\nu} \left(1 - \frac{3\rho}{4\nu + 1} \right) P_{2\nu-2} - \frac{k}{g'} \right],$$

et le dénominateur $(1 - \mu^2)$ disparaîtra de l'équation (5‴).

Considérons, comme aux n^{os} 138 et 139, la constante q comme une inconnue, et exprimons que

$$\frac{4n\mu a'}{i} - (1 - \mu^2) \frac{da'}{d\mu}$$

est divisible par $i^2 - 4n^2\mu^2$; nous aurons, comme aux numéros précités, par l'identification des termes semblables des deux membres de l'équation (5‴), le nombre voulu d'équations pour déterminer q et les coefficients des fonctions P.

Soit $G\mu^{2\nu-2}$ le terme du degré le plus élevé en μ de $P_{2\nu-2}$; le terme correspondant de a' sera

$$G(1 - \mu^2) \mu^{2\nu-2} \left(1 - \frac{3\rho}{4\nu + 1} \right)$$

et celui du second membre de l'équation (5)

$$G\frac{lgq}{2n^2}\left(2\nu^2+\nu+\frac{2n}{l}\right)\left(1-\frac{3\rho}{4\nu+1}\right)(1-\mu^2)\mu^{2\nu-2};$$

en égalant ce dernier terme à $G(1-\mu^2)\mu^{2\nu-2}$ et remarquant que $\frac{2n}{i}$ est sensiblement égal à l'unité, on trouve

$$q=\frac{2n^2}{lg\left(1-\frac{3\rho}{4\nu+1}\right)(2\nu^2+\nu+1)},$$

et l'on pourra déterminer, pour la loi de profondeur résultant de cette valeur, qui est la même que celle du n° 139 qui se rapporte aux oscillations de la seconde espèce, les oscillations de la troisième espèce.

142. Loi des oscillations de la troisième espèce dans l'hypothèse d'une profondeur constante. — Nous avons vu (n° 140) que cette hypothèse est la seule compatible avec les résultats de l'observation.

Comme les quantités A, ν, ψ varient très lentement relativement à la durée du jour, nous pourrons les considérer comme constantes.

D'après ce qui précède, ν, dans la formule (2) du n° 132, ne doit pas être inférieur à 2, et, comme la densité relative ρ est plus petite que $\frac{1}{4}$, on peut, sans inconvénient, la négliger dans cette formule.

Nous avons

$$V'=\frac{3M}{4A^3}(1-\mu^2)\cos^2\nu\cos 2(nt+\varpi-\psi),$$

et si nous posons

$$z=a\cos 2(nt+\varpi-\psi),$$

il vient, en se reportant au n° 135,

$$a'=a-\frac{3M}{4A^3g}(1-\mu^2)\cos\nu.$$

Nous devrons supposer $i=2n$, $q=0$ dans l'équation (5'''), et, en posant

$$1-\mu^2=\sin^2\theta=x^2,$$

cette équation devient

$$x^2(1-x^2)\frac{d^2a}{dx^2}-x\frac{da}{dx}-2a\left(4-x^2-\frac{2n^2}{lg}x^4\right)+\frac{6M}{A^3g}x^2\cos^2\nu=0.$$

Pour satisfaire à cette équation, supposons que a soit développable en série convergente ordonnée suivant la puissance de x^2, et soit

$$a = A_2 x^2 + A_4 x^4 + \ldots + A_{2\nu} x^{2\nu} + A_{2\nu+2} x^{2\nu+2} + A_{2\nu+4} x^{2\nu+4} + \ldots .$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation ci-dessus, on trouve d'abord, en identifiant les coefficients de x^2,

$$A_2 = \frac{3M}{4A^3 g} \cos^2 \nu.$$

La comparaison des coefficients de x^4 donne une identité; enfin, pour $\nu \geq 1$, la comparaison des coefficients de $x^{2\nu+4}$ donne

$$A_{2\nu+4}(2\nu^2 + 6\nu) - A_{2\nu+2}(2\nu^2 + 3\nu) + \frac{2n^2}{lg} A_{2\nu} = 0.$$

Cette équation permettra de déterminer A_6, A_8, ... lorsque A_2 et A_4 seront connus. En les mettant sous la forme

$$\frac{A_{2\nu+2}}{A_{2\nu}} = \frac{\frac{2n^2}{lg}}{2\nu^2 + 3\nu - (2\nu^2 + 6\nu)\frac{A_{2\nu+4}}{A_{2\nu+2}}},$$

on en déduira

$$\frac{A_{2\nu+2}}{A_{2\nu}} = \cfrac{\frac{2n^2}{lg}}{2\nu^2 + 3\nu - \cfrac{\frac{4n^2}{lg}(\nu^2 + 3\nu)}{2(\nu+1)^2 + 3(\nu+1) - \cfrac{\frac{4n^2}{lg}[(\nu+1)^2 + 3(\nu+1)]}{2(\nu+2)^2 + 3(\nu+1) - \ldots}}};$$

d'où, en supposant $\nu = 1$,

$$A_4 = \cfrac{\frac{2n^2}{lg} A_2}{2.1^2 + 3.1 - \cfrac{\frac{4n^2}{lg}(1^2 + 3)}{2.2^2 + 3.2 - \cfrac{\frac{4n^2}{lg}(2^2 + 3.2)}{2.3^2 + 3.3 - \cfrac{\frac{4n^2}{lg}(3^2 + 3.3)}{2.4^2 + 3.4 - \ldots}}}}$$

On aura ainsi A_1 au moyen de A_2. Le rapport $\frac{n^2}{g}$ de la force centrifuge à la pesanteur est $\frac{1}{289}$; si l'on suppose successivement $\frac{2n^2}{lg} = 20,\ 5,\ \frac{5}{2}$, les profondeurs correspondantes seront $l = \frac{1}{2890}, \frac{1}{722,5}, \frac{1}{361,5}$, en se rappelant que le rayon de la Terre a été pris pour unité. Les valeurs correspondantes de a seront

$$(\alpha)\qquad a = \frac{3\mathrm{M}x^2\cos^2\nu}{4\mathrm{A}^3 g}\begin{pmatrix} 1,0000 & +20,1862x^2 & +10,1164x^4 \\ -13,1047x^6 & -15,4488x^8 & -7,4561x^{10} \\ -2,1975x^{12} & -0,4501x^{14} & -0,0687x^{16} \\ -0,0082x^{18} & -0,0008x^{20} & -0,0001x^{22} \end{pmatrix},$$

$$(\alpha')\qquad a = \frac{3\mathrm{M}x^2\cos^2\nu}{4\mathrm{A}^3 g}\begin{pmatrix} 1,0000 & +6,1960x^2 & +3,2474x^4 & +0,7238x^6 \\ +0,0919x^8 & +0,0076x^{10} & +0,0004x^{12} & \end{pmatrix},$$

$$(\alpha'')\qquad a = \frac{3\mathrm{M}x^2\cos^2\nu}{4\mathrm{A}^3 g}(1,0000 + 0,7504x^2 + 0,1566x^4 + 0,01574x^6 + 0,0009x^8).$$

Dans l'hypothèse actuelle d'une profondeur constante, les oscillations de la seconde espèce sont nulles (n° **140**); celles de la première espèce sont données par la formule (4) du n° **134** en y négligeant le terme en ρ, et, si on les réunit à celles de la troisième espèce, on a pour résultat

$$(\beta)\qquad z = \frac{\mathrm{M}}{4\mathrm{A}^3 g}(\sin^2\nu - \tfrac{1}{2}\cos^2\nu)(1 + 3\cos 2\theta) + a\cos 2(nt + \varpi - \psi).$$

En désignant par m la vitesse angulaire sidérale du Soleil dont l'orbite apparente est censée circulaire, on a

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}^2} = m^2\mathrm{A},$$

d'où

$$\frac{3\mathrm{M}}{4\mathrm{A}^3 g} = \frac{3n^2}{4g}\frac{m^2}{n^2} = \frac{3}{4\times 289\times(366,26)^2}.$$

Si, au lieu du rayon terrestre, on prend le mètre pour unité, cette quantité devra être multipliée par 6366200, ce qui donne

$$\frac{3\mathrm{M}}{4\mathrm{A}^3 g} = 0^{\mathrm{m}},12316.$$

Le rapport de la masse M′ de la Lune, divisée par le cube de sa moyenne distance A′ à la Terre, à la masse du Soleil divisée par le cube de sa moyenne distance à la Terre, étant égal à 3, on a

$$\frac{3M'}{4A'^3 g} = 3 \times 0^m,12316.$$

Nous désignerons par v′ et ψ' l'ascension droite et la déclinaison de la Lune.

En nous plaçant dans le cas de la formule (α) qui correspond à une profondeur égale à $\frac{1}{2890}$ du rayon terrestre, l'équation (β) nous donnera, pour l'oscillation totale due à l'action combinée du Soleil et de la Lune,

$$z = 0^m,12316\,\frac{1+3\cos\theta}{3}\left(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v + 3\sin^2 v' - \tfrac{3}{2}\cos^2 v'\right)$$
$$+ 0^m,12316\,x^2\begin{pmatrix} 1,0000 & +20,1862\,x^2 & +10,1164\,x^4 \\ -13,1047\,x^2 & -15,4488\,x^8 & -\ 7,4581\,x^{10} \\ -\ 2,1975\,x^{12} & -\ 0,4501\,x^{14} & -\ 0,0687\,x^{16} \\ -\ 0,0082\,x^{18} & -\ 0,0008\,x^{20} & -\ 0,0001\,x^{32} \end{pmatrix}$$
$$\times\left[\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi) + 3\cos^2 v'\cos 2(nt+2\varpi-\psi')\right].$$

Le coefficient des termes qui dépendent de la longitude est négatif pour $x = 1$, c'est-à-dire à l'équateur, nul pour $x = \sin 18^\circ$ environ, positif à partir de la latitude de 18° jusqu'au pôle où $x = 0$, valeur pour laquelle il s'annule encore.

Supposons que les deux astres se trouvent dans le plan de l'équateur ou que $v = 0$, $v' = 0$, selon qu'ils sont en conjonction ou en opposition, on a $\psi' = \psi$, $\psi' = 180^\circ + \psi$; la basse et la haute mer correspondent respectivement à $nt + \varpi - \psi = 0$, $nt + \varpi - \psi = 90^\circ$, si $\theta < 18^\circ$, et inversement lorsque $\theta > 18^\circ$. La différence des deux mers est de $7^m,34$ à l'équateur, nulle à la latitude de 18° et au pôle. Ainsi donc la haute mer aurait lieu quand les deux astres se trouvent à l'horizon et la basse mer quand ils passent au méridien, dans la zone limitée par les latitudes de 18° et — 18°; l'inverse aurait lieu en dehors de cette zone jusqu'aux pôles, la différence des deux mers serait nulle pour les latitudes de 18° et — 18°.

Dans le cas de la formule (α') ou de $l = \frac{1}{722,5}$, on a

$$z = 0^m,12316\left(\frac{1+3\cos 2\theta}{3}\right)(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v + 3\sin^2 v' - \tfrac{3}{2}\cos^2 v')$$
$$0,12316\,x^2\left(\begin{array}{r}1,0000 + 6,1960x^2 + 3,2474x^4 + 0,7236x^6\\ + 0,0919x^8 + 0,0076x^{10} + 0,0004x^{12}\end{array}\right)$$
$$\times[\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi) + 3\cos^2 v'\cos 2(nt+\varpi-\psi')].$$

La haute mer aurait toujours lieu lors du passage au méridien des astres supposés en conjonction ou en opposition dans l'équateur, et la différence de la haute et de la basse mer à l'équateur serait de $11^m,05$, en négligeant les carrés de v et v'.

Enfin, dans le cas de $l = \frac{1}{361,25}$ ou de la formule (α''), on a

$$z = 0^m,12316\left(\frac{1+3\cos 2\theta}{3}\right)(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v + 3\sin^2 v' - \tfrac{3}{2}\cos^2 v')$$
$$+ 0^m,12316\,x^2\left(\begin{array}{r}1,000 + 0,7504\ x^2 + 0,1566x^4\\ + 0,01574x^6 + 0,0009x^8\end{array}\right)$$
$$\times[\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi) + 3\cos^2 v'\cos 2(nt+\varpi-\psi')],$$

et, dans les mêmes suppositions que ci-dessus, on aurait $1^m,90$ pour la différence de la haute mer et de la basse mer à l'équateur.

Si l augmente, z diminue et la valeur de a se réduit bientôt à une quantité peu différente de la limite

$$a = \frac{3}{4}\frac{M}{A^3 g}x^2\cos^2 v + \frac{3}{4}\frac{M'}{A'^3 g}\cos^2 v',$$

qui correspond à $l = \infty$; on trouve alors, lorsque les deux astres sont en conjonction dans le plan de l'équateur, $0^m,98528$ pour la différence des deux mers, ce qui est une limite inférieure.

La valeur ci-dessus de a n'étant autre chose que celle qui conviendrait au cas où la mer prendrait à chaque instant sa forme d'équilibre, nous sommes conduit à étudier directement cette question sans nous imposer aucune des conditions restrictives établies au commencement de ce numéro et en tenant compte simultanément des trois espèces d'oscillations.

143. Forme d'équilibre que prendrait la mer sous l'action du Soleil et de la Lune. — Nous avons

$$g z - V = 0$$

ou

$$\Sigma Z_\nu = \frac{V}{g}.$$

La portion V' de V relative à l'action des astres est, comme nous l'avons vu, une fonction sphérique du second ordre; l'autre portion, due à l'excès sphéroïdal, est

$$\rho(Z_1 + \tfrac{3}{5} Z_2 + \dots),$$

d'où il suit que z doit se réduire à Z_2, et que par suite la forme d'équilibre est un ellipsoïde. Nous avons ainsi, en nous reportant à la formule (3) du n° **133**,

$$\begin{aligned} z = \frac{M}{g A^3 (1 - \frac{3}{5}\rho)} \Big\{ & \tfrac{1}{4} [\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v + 3(\sin^2 v' - \tfrac{1}{2}\cos^2 v')](1 + 3\cos 2\theta) \\ & + 3\sin\theta\cos\theta [\sin v \cos v \cos(nt + \varpi - \psi) + 3 \sin v' \cos v' \cos(nt + \varpi - \psi')] \\ & + \tfrac{3}{4}\sin^2\theta [\cos^2 v \cos 2(nt + \varpi - \psi) + 3\cos^2 v' \cos 2(nt + \varpi - \psi')] \Big\}. \end{aligned}$$

Si, avec la même déclinaison, le Soleil et la Lune sont en conjonction, l'excès de la haute mer à midi sur la mer qui la suit est

$$\frac{6M}{A^3 g (1 - \frac{3}{5}\rho)} \sin^2\theta \cos^2 v (1 + 2 \operatorname{tang} v \cot\theta),$$

et l'excès de la haute mer à minuit sur la basse mer,

$$\frac{6M}{A^3 g (1 - \frac{3}{5}\rho)} \sin^2\theta \cos^2 v (1 - 2 \operatorname{tang} v \cot\theta).$$

Le rapport de ces excès

$$\frac{1 + 2 \operatorname{tang} v \cot\theta}{1 - 2 \operatorname{tang} v \cot\theta}$$

serait environ égal à 8 pour $v = 23^\circ$ et $\theta = 48^\circ 23' 22''$, colatitude de Brest.

Comme, d'après l'observation, ce rapport est très voisin de l'unité, on voit que l'hypothèse actuelle est inadmissible et qu'il importe de tenir

compte de l'inertie de la masse fluide, des forces apparentes dans le mouvement relatif.

§ III. — Lois générales des marées.

144. D'après ce qui précède, en supposant que le noyau terrestre est un ellipsoïde de révolution, la marée aurait lieu précisément à l'instant du passage de l'astre considéré au méridien du lieu, ce qui est contraire à la réalité. Il nous reste donc maintenant à voir quelle influence peut avoir, sur les retards des marées, la profondeur de la mer en longitude et en latitude, indépendamment des résistances que nous avons négligées et qu'il nous paraît impossible de soumettre au calcul.

Nous n'avons pas à revenir sur les oscillations de la première espèce, que nous avons déterminées au n° **134**, quelle que soit la profondeur de la mer.

La fonction V′ étant censée développée en une série de cosinus et de sinus d'angles multiples du temps, dont le type général est it, on satisfera aux équations (1) du n° **132** en posant

$$(6)\qquad \begin{cases} z = \mathrm{F}\cos it + \mathrm{G}\sin it, \\ gz - \mathrm{V} = \mathrm{F}'\cos it + \mathrm{G}'\sin it, \\ u = \mathrm{H}\cos it + \mathrm{K}\sin it, \\ v = \mathrm{P}\cos it + \mathrm{Q}\sin it, \end{cases}$$

F, G, F′, G′, H, K, P, Q étant des fonctions inconnues de μ et ϖ. En identifiant les termes semblables, on trouve

$$i^2\mathrm{H} + 2ni\sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{Q} = -\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{d\mathrm{F}'}{d\mu},$$

$$i^2\mathrm{K} - 2ni\sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{P} = -\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{d\mathrm{G}'}{d\mu},$$

$$i^2(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{P} - 2ni\mu\sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{K} = \frac{d\mathrm{F}'}{d\varpi},$$

$$i^2(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{Q} + 2ni\mu\sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{H} = \frac{d\mathrm{G}'}{d\varpi},$$

$$\mathrm{F} = \frac{d}{d\mu}(\gamma\mathrm{H}\sqrt{1-\mu^2}) - \frac{d}{d\varpi}(\gamma\mathrm{P}),$$

$$\mathrm{G} = \frac{d}{d\mu}(\gamma\mathrm{K}\sqrt{1-\mu^2}) - \frac{d}{d\varpi}(\gamma\mathrm{Q}),$$

d'où, par l'élimination de F et G,

$$(B)\quad \begin{cases} H = \dfrac{-\sqrt{1-\mu^2}\,\dfrac{dF'}{d\mu} - \dfrac{2n\mu}{i\sqrt{1-\mu^2}}\,\dfrac{dG'}{d\varpi}}{i^2-4n^2\mu^2}, \\ K = \dfrac{-\sqrt{1-\mu^2}\,\dfrac{dG'}{d\mu} + \dfrac{2n\mu}{i\sqrt{1-\mu^2}}\,\dfrac{dF'}{d\varpi}}{i^2-4n^2\mu^2}, \\ P = \dfrac{\dfrac{dF'}{d\varpi} - \dfrac{2n\mu}{i}(1-\mu^2)\dfrac{dG'}{d\mu}}{(i^2-4n^2\mu^2)(1-\mu^2)}, \\ Q = \dfrac{\dfrac{dG'}{d\varpi} + \dfrac{2n\mu}{i}(1-\mu^2)\dfrac{dF'}{d\mu}}{(i^2-4n^2\mu^2)(1-\mu^2)}. \end{cases}$$

On a, par suite,

$$(C)\quad \begin{cases} F = -\dfrac{\gamma(1-\mu^2)}{i^2-4n^2\mu^2}\dfrac{d^2F'}{d\mu^2} - \dfrac{\gamma}{(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)}\dfrac{d^2F'}{d\varpi^2} - \dfrac{d}{d\mu}\left[\dfrac{\gamma(1-\mu^2)}{i^2-4n^2\mu^2}\right]\dfrac{dF}{d\mu} \\ \quad - \dfrac{1}{(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)}\dfrac{d\gamma}{d\varpi}\dfrac{dF'}{d\varpi} + \dfrac{2n\mu}{i(i^2-4n^2\mu^2)}\dfrac{d\gamma}{d\varpi}\dfrac{dG'}{d\mu} \\ \quad - \dfrac{2n}{i}\dfrac{d}{d\mu}\left(\dfrac{\gamma u}{i^2-4n^2\mu^2}\right)\dfrac{dG'}{d\mu}. \end{cases}$$

En changeant dans cette équation F en G, F′ en G′, et réciproquement $\frac{2n}{i}$ en $-\frac{2n}{i}$, on obtiendra la suivante :

$$(C')\quad \begin{cases} G = -\dfrac{\gamma(1-\mu^2)}{i^2-4n^2\mu^2}\dfrac{d^2G'}{d\mu^2} - \dfrac{\gamma}{(1-\mu^2)(i^2-4n\mu^2)}\dfrac{d^2G'}{d\varpi^2} \\ \quad - \dfrac{d}{d\mu}\dfrac{\gamma(1-\mu^2)}{i^2-4n^2\mu^2}\dfrac{dG'}{d\mu} - \dfrac{1}{(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)}\dfrac{d\gamma}{d\varpi}\dfrac{dG'}{d\varpi} \\ \quad - \dfrac{2n\mu}{i(i^2-4n^2\mu^2}\dfrac{d\gamma}{d\varpi}\dfrac{dF'}{d\mu} + \dfrac{2n}{i}\dfrac{d}{d\mu}\left(\dfrac{\gamma u}{i^2-4n^2\mu^2}\right)\dfrac{dF'}{d\mu}, \end{cases}$$

et six des coefficients qui entrent dans les équations (6) se détermineront en fonction des deux autres F′ et G′.

145. Loi des profondeurs pour laquelle les oscillations de la seconde espèce sont nulles pour toute la Terre. — Nous avons F = 0, G = 0 et, d'après l'équation (2) du n° **132**, $gz - V$ se réduit à

— V', et en se reportant à la formule (3) du n° 133, les fonctions F', G' sont de la forme

$$F' = N\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi, \quad G' = -N\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi,$$

N étant une fonction du temps indépendante de μ et de ϖ.

Les équations (C) et (C') deviennent

$$\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi\frac{d\gamma}{d\mu} + \frac{\mu\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{d\gamma}{d\varpi} = 0,$$

$$\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi\frac{d\gamma}{d\mu} - \frac{\mu\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{d\gamma}{d\varpi} = 0,$$

d'où

$$\frac{d\gamma}{d\mu} = 0, \quad \frac{d\gamma}{d\varpi} = \mu.$$

Donc, *les oscillations de la seconde espèce ne pourraient disparaître pour toute la Terre que si la profondeur de la mer était constante*, ce qui est conforme au résultat obtenu au n° 140 dans un cas particulier.

146. Loi des profondeurs pour laquelle les oscillations de la troisième espèce sont nulles pour toute la Terre. — Nous avons F = 0, G = 0, et (n° 133) F' et G' sont de la forme

$$F' = N(1-\mu^2)\cos 2\varpi, \quad G' = -N(1-\mu^2)\sin 2\varpi,$$

N étant une fonction de t indépendante de μ et de ϖ. Les équations (C) et (C') donnent

$$\frac{2\gamma\cos 2\varpi}{1-\mu^2} + \mu\cos 2\varpi\frac{d\gamma}{d\mu} + \frac{1+\mu^2}{2(1-\mu^2)}\sin 2\varpi\frac{d\gamma}{d\varpi} = 0,$$

$$\frac{2\gamma\sin 2\varpi}{1-\mu^2} + \mu\sin 2\varpi\frac{d\gamma}{d\mu} - \frac{1+\mu^2}{2(1-\mu^2)}\cos 2\varpi\frac{d\gamma}{d\varpi} = 0,$$

d'où

$$\frac{d\gamma}{d\varpi} = 0, \quad \mu\frac{d\gamma}{d\mu} + \frac{2\gamma}{1-\mu^2} = 0$$

et

$$\gamma = A\frac{1-\mu^2}{\mu},$$

A étant une constante arbitraire. Comme, pour $\varpi = 0$ ou $\theta = 90°$, on a $\gamma = \infty$, on voit qu'*il n'y a aucune loi admissible de profondeur qui puisse rendre nulles, pour toute la Terre, les oscillations de la troisième espèce.*

147. Expression de la surélévation de la mer dans chaque port. — 1° *Oscillations de la première espèce.* — L'équation (4) du n° **134** nous donne

$$(D)\qquad z=-\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5}\rho\right)}\left[\frac{M}{A^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{M'}{A'^3}(1-3\sin^2 v')\right].$$

2° *Oscillations de la seconde espèce.* — Nous pouvons, dans les formules (6) du n° **144**, remplacer $\sin it$ par

$$\frac{M}{A^3}\sin v\cos v\sin(nt-\psi),$$

et $\cos it$ par

$$\frac{M}{A^3}\sin v\cos v\cos(nt-\psi);$$

car, par la substitution dans les équations (1) du n° **132**, les dérivées par rapport aux temps de A, v, ψ seront très petites, en raison de la lenteur avec laquelle varient ces quantités comparativement à la durée du jour, et pourront, par suite, être négligées. La première des formules (6) du n° **144** pourra alors se mettre sous la forme

$$z=\frac{\mathfrak{A}M}{A^3}\sin v\cos v\sin(nt+\varpi-\psi-\beta),$$

$\mathfrak{A}$, β étant des fonctions de μ et de ϖ dépendant uniquement de la loi de profondeur de la mer.

En ajoutant à cette oscillation celle qui est due à l'attraction de la Lune, nous aurons pour résultat

$$(D')\qquad \begin{cases} z=\mathfrak{A}\left[\dfrac{M}{A^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi-\beta)\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{M'}{A'^3}\sin v'\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi'-\beta')\right]. \end{cases}$$

3° *Oscillations de la troisième espèce.* — En faisant le même raisonnement que ci-dessus, on est conduit à poser

$$(D'')\qquad \begin{cases} z=\mathfrak{B}\left[\dfrac{M}{A^3}\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{M'}{A'^3}\cos^2 v'\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda')\right], \end{cases}$$

en désignant par $\mathfrak{B}$ et λ deux fonctions analogues à $\mathfrak{A}$ et β.

En faisant la somme des expressions (D), (D′), (D″), on a, pour l'oscillation totale,

$$
(7)\quad \left\{\begin{aligned}
z = &-\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5}\rho\right)}\left[\frac{M}{A^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{M'}{A'^3}(1-3\sin^2 v')\right]\\
&+\mathfrak{A}\left[\frac{M}{A^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi-\beta)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{M'}{A'^3}\sin v'\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi'-\beta')\right]\\
&+\mathfrak{B}\left[\frac{M}{A^3}\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{M'}{A'^3}\cos^2 v'\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda')\right].
\end{aligned}\right.
$$

D'après cette formule, on voit que l'instant du maximum ou du minimum d'une oscillation peut être différent de celui du passage au méridien de l'astre qui l'a produit, ce qui est conforme à l'observation; mais le maximum et le minimum des oscillations d'une même espèce suivraient d'un même intervalle les passages de leurs astres respectifs. Il faut donc supposer que λ et β, qui se rapportent au Soleil, ont des valeurs différentes de celles des constantes λ' et β', qui sont relatives à la Lune. L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur la loi de la variation de ces constantes consiste à supposer qu'elles varient proportionnellement à la vitesse angulaire de l'astre. En désignant par γ et T deux constantes spécifiques pour le port considéré, par m, m' les vitesses angulaires du Soleil et de la Lune, nous poserons

$$\lambda = \gamma - (m-n)\mathrm{T},$$
$$\lambda' = \gamma - (m'-n)\mathrm{T}.$$

Les constantes γ et T ne paraissant dépendre que des inégalités du fond de la mer et de la plage, nous pouvons poser

$$\beta = \lambda, \quad \beta' = \lambda'.$$

Le coefficient $\mathfrak{B}$, qui est censé se rapporter au Soleil, paraît avoir une autre valeur $\mathfrak{B}'$ pour la Lune, et, en admettant que ces deux coefficients suivent la même loi que λ, λ', nous aurons

$$\mathfrak{B} = \mathrm{P}(1-2m\,\mathrm{Q}),$$
$$\mathfrak{B}' = \mathrm{P}(1-2m'\mathrm{Q}),$$

en désignant par P et Q deux constantes pour un même port.

Les quantités $(m-n)\mathrm{T}$, $(m'-n)\mathrm{T}$, $m\mathrm{PQ}$, $m'\mathrm{PQ}$ sont assez petites pour qu'on puisse en négliger les carrés ou les produits. Nous avons, en conséquence,

$$\cos(nt+\varpi-\psi-\lambda) = \cos(nt+\varpi-\psi-\gamma) + \sin(nt+\varpi-\psi-\gamma).(m-n)\mathrm{T},$$
$$\cos(nt+\varpi-\psi'-\lambda') = \cos(nt+\varpi-\psi'-\gamma) + \sin(nt+\varpi-\psi'-\gamma).(m'-n)\mathrm{T},$$
$$\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)$$
$$= \cos 2(nt+\varpi-\psi-\gamma) + 2\sin 2(nt+\varpi-\psi-\gamma)(m-n)\mathrm{T},$$
$$\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda')$$
$$= \cos 2(nt+\varpi-\psi'-\gamma) + 2\sin 2(nt+\varpi'-\psi'-\gamma)(m'-n)\mathrm{T}.$$

L'équation (7) devient, par suite, au degré d'approximation convenu,

$$(7')\quad \left\{\begin{aligned} z = &-\frac{1+3\cos 2\theta}{8g(1-\frac{3}{5}\rho)}\left[\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}^3}(1-3\sin^2\mathrm{v}) + \frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{A}'^3}(1-3\sin^2\mathrm{v}')\right]\\ &+\mathfrak{h}\left[\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}^3}\sin\mathrm{v}\cos\mathrm{v}\cos(nt+\varpi-\psi-\gamma)\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{A}'^3}\sin\mathrm{v}'\cos\mathrm{v}'\cos(nt+\varpi'-\psi'-\gamma)\right]\\ &+\mathfrak{h}\left[\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}^3}\sin\mathrm{v}\cos\mathrm{v}\sin(nt+\varpi-\psi-\gamma)(m-n)\mathrm{T}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{A}'^3}\sin\mathrm{v}'\cos\mathrm{v}'\sin(nt+\varpi'-\psi'-\gamma)(m'-n)\mathrm{T}\right]\\ &-2\mathrm{PQ}\left[m\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}^3}\cos^2\mathrm{v}\cos 2(nt+\varpi-\psi-\gamma)\right.\\ &\qquad\left.+m'\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{A}'^3}\cos^2\mathrm{v}'\cos 2(nt+\varpi'-\psi'-\gamma)\right]\\ &+\mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}^3}\cos^2\mathrm{v}\cos 2(nt+\varpi-\psi-\gamma)\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{A}'^3}\cos^2\mathrm{v}'\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right]\\ &+2\mathrm{PT}\left[(m-n)\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}^3}\cos^2\mathrm{v}\sin 2(nt+\varpi-\psi-\gamma)\right.\\ &\qquad\left.+(m'-n)\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{A}'^3}\cos^2\mathrm{v}'\sin 2(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right]. \end{aligned}\right.$$

148. Prédiction des heures des marées. — Laplace, en discutant les résultats d'un grand nombre d'observations faites à Brest, a reconnu que les termes dépendant de Q et T sont très petits, et, en les

négligeant, il vient

$$z = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5}\rho\right)}\left[\frac{M}{A^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{M'}{A'^3}(1-3\sin^2 v')\right]$$
$$+\mathfrak{h}\left[\frac{M}{A^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{M'}{A'^3}\sin v'\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right]$$
$$+P\left[\frac{M}{A^3}\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{M'}{A'^3}\cos^2 v'\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right].$$

Si nous considérons A, v, ψ comme constants dans la différentiation par rapport au temps, par des motifs que nous avons fait connaître plus haut et sur lesquels nous n'avons pas à revenir, et si nous négligeons le rapport $\frac{\mathfrak{h}}{2P}$, qui, à Brest, atteint au plus $\frac{1}{40}$, l'équation $\frac{dz}{dt}=0$, qui doit donner les heures de la haute et de la basse mer, devient

$$\frac{M}{A^3}\cos^2 v\sin 2(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{M'}{A'^3}\cos^2 v'\sin 2(nt+\varpi-\psi'-\gamma)=0,$$

d'où

$$(E)\quad \begin{cases} \tang 2(nt+\varpi-\psi'-\gamma)=\dfrac{\dfrac{M}{A^3}\cos^2 v\sin 2(\psi-\psi')}{\dfrac{M}{A^3}\cos^2 v\cos 2(\psi-\psi')+\dfrac{M'}{A'^3}\cos^2 v'} \\ \qquad\qquad =\dfrac{\sin 2(\psi-\psi')}{\cos 2(\psi-\psi')+\dfrac{M'}{A'^3}:\dfrac{M}{A^3}\cdot\dfrac{\cos^2 v'}{\cos^2 v}}. \end{cases}$$

Soient δ, δ' les demi-diamètres apparents du Soleil et de la Lune correspondant aux distances A, A'; δ_0, δ'_0 les valeurs qu'ils prennent pour les distances moyennes A_0, A'_0.

Les résultats des observations de Brest ont conduit Laplace à poser

$$\frac{M'}{A'^3_0}:\frac{M}{A^3_0}=3{,}06,$$

rapport qui diffère peu du nombre 3 que nous avons admis plus haut Nous avons

$$\frac{A'_0}{A'}=\frac{\delta'}{\delta'_0},\quad \frac{A_0}{A}=\frac{\delta}{\delta_0};$$

$$\frac{M'}{A'^3}:\frac{M}{A^3}=\frac{M'}{A'^3_0}\left(\frac{A^3_0}{A'^3}\right):\frac{M'}{A^3_0}\left(\frac{A^3_0}{A'^3}\right)=3{,}06\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^3\left(\frac{\delta_0}{\delta'_0}\right)^3.$$

En supposant le rapport $\frac{\delta_0}{\delta_0}$ égal à l'unité, quoiqu'il lui soit supérieur de o,o3 environ, la formule (E) devient

$$nt + \varpi - \psi' - \gamma = \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin 2(\psi - \psi')}{\cos 2(\psi - \psi') + 3{,}06\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^3 \frac{\cos^2 \nu'}{\cos^2 \nu}}.$$

Soient

t' le temps au bout duquel la Lune est passée au méridien;
p l'heure de ce passage;
H celle de la marée;
$\alpha = \psi - \psi'$ l'excès de l'ascension du Soleil vrai sur celle de la Lune.

Nous avons

$$nt' + \varpi - \psi' = 0;$$

par suite,

$$n(t - t') - \gamma = \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 3{,}06\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^3 \frac{\cos^2 \nu'}{\cos^2 \nu}};$$

mais nous avons aussi

$$\frac{n(t - t')}{2\pi} = \frac{H - p}{24},$$

d'où, en remplaçant $\frac{12\gamma}{\pi}$ par e,

$$H - p - e = \frac{6}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 3{,}06\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^3 \frac{\cos^2 \nu'}{\cos^2 \nu}}.$$

Si nous convenons d'exprimer l'arc en degrés, on devra multiplier le second membre de cette équation par $\frac{\pi}{180}$, et nous aurons finalement

$$(8) \qquad H - p - e = \tfrac{1}{30}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 3{,}06\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^3 \frac{\cos^2 \nu'}{\cos^2 \nu}}.$$

Cette formule est celle que donne l'*Annuaire du Bureau des Longitudes;* mais, dans l'application, on a reconnu qu'il convenait d'attribuer à ν, ν', α, δ, δ' les valeurs qui correspondent à $1^j,5$ avant le passage de la Lune au méridien.

La quantité e est constante pour un port, mais varie d'un port à un autre en raison des circonstances locales.

Soit E *l'établissement du port* ou le retard $H - p$ de la pleine mer sur le passage de la Lune au méridien, le jour d'une syzygie équinoxiale, quand la Lune est à sa moyenne distance de la Terre. Comme l'ascension droite du Soleil surpasse celle de la Lune de 18° un jour et demi avant la syzygie, nous avons

$$H = p + e + 19^{min};$$

mais, par définition, $H - p = E$; par suite,

$$e = E - 19^{min},$$

et, en posant

$$(9)\qquad \begin{cases} A = 3{,}06\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^3 \frac{\cos^2 v'}{\cos^2 v}, \\ C = \frac{1}{30}\,\text{arc}^0\,\text{tang}\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha + A^3}, \end{cases}$$

il vient, pour l'heure d'une pleine mer quelconque,

$$(10)\qquad H = p + C + E - 19^{min}.$$

L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* comprend des Tables qui font connaître, pour tous les jours de l'année, les valeurs de $10A$, α et du terme de correction C exprimé en minutes.

149. Hauteur des marées. — Soient

$$\zeta = nt + \varpi - \psi$$

l'angle horaire du Soleil; i le rapport de la moyenne distance du Soleil à sa distance actuelle; i' la parallaxe horizontale actuelle de la Lune, divisée par sa valeur moyenne $57'1''$. Les quantités i, i', comme v, v', ψ, ψ', doivent être calculées pour l'instant qui précède de $1^j,5$ le passage de la Lune au méridien.

Laplace a déduit d'un grand nombre de marées syzygies observées à Brest $\gamma = 0^j,18358 = 66^0 5'$ pour l'intervalle dont la marée solaire suit le passage du Soleil au méridien et a donné, pour la hauteur de

la mer dans ce port, la formule suivante :

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} z = -0^{m},02745\,[i^3(1-3\sin^2 v)+3i'^3(1-3\sin^2 v')] \\ \quad +0^{m},07179\,[i'^3\sin v\cos v\cos(\zeta-66^\circ 5') \\ \qquad\qquad +3i'^3\sin v'\cos v'\cos(\zeta+\psi-\psi'-66^\circ 5')] \\ \quad +0^{m},78112\,[i^3\cos^2 v\cos 2(\zeta-66^\circ 5') \\ \qquad\qquad +3i'^3\cos^2 v'\cos 2(\zeta+\psi-\psi'-66^\circ 5')]. \end{array}\right.$$

Lors des grandes marées syzygies qui suivent d'un jour et demi l'instant de la pleine ou de la nouvelle Lune, on a

$$\zeta-66^\circ 5' = \zeta+\psi-\psi'-66^\circ 5' = 0 \text{ ou } = 180^\circ,$$

et la formule (11) donne

$$\begin{aligned} z = &-0^{m},02745\,[i^3(1-3\sin^2 v)+3i'^3(1-3\sin^2 v')] \\ &+0^{m},07179\,(\pm i^2\sin v\cos v\pm 3i'^3\sin v'\cos v') \\ &+0^{m},78112\,(i^3\cos^2 v+3i'^3\cos^2 v') \end{aligned}$$

ou simplement

$$z = 0^{m},78112\,(i^3\cos^2 v+3i'^3\cos^2 v'),$$

en négligeant les deux premiers termes en raison de leur petitesse par rapport au troisième.

Si la Lune est de plus à sa moyenne distance de la Terre, et se trouve sensiblement dans l'équateur, on a, à très peu près, $i=1$, $v=0$, $v'=0$, $i'=\frac{41}{40}$; par suite,

$$z = 0,78112\times\tfrac{163}{40}.$$

En prenant cette hauteur pour unité, on aura, pour une syzygie quelconque,

$$z = \tfrac{40}{163}\,(i^3\cos^2 v+3i'^3\cos^2 v').$$

§ IV. — Des oscillations de l'atmosphère.

150. Loi des pressions dans l'atmosphère supposée en équilibre. — Nous ferons abstraction de la variation de la température de l'air à différentes altitudes. Soient

p, ρ la pression et la densité en un point de l'atmosphère;
g la pesanteur;
l une constante.

Nous avons, d'après la loi de Mariotte, la relation

$$p = lg\rho,$$

qui donnerait à l'atmosphère une hauteur infinie; mais, à une hauteur très petite par rapport au rayon terrestre, la densité est si faible qu'elle peut être considérée comme nulle.

La constante l représente la hauteur qu'aurait l'atmosphère si elle avait en tous ses points la même densité qu'au niveau de la mer; elle est très petite par rapport au rayon de la Terre, dont elle n'est guère que la $\frac{1}{800}$ partie (¹). Nous ferons remarquer que l'équilibre de la mer exige que la pression à sa surface, par suite la densité de la couche d'air adjacente, soit constante. On a, pour un point m de l'atmosphère situé à la distance r du centre de la Terre,

$$\frac{n^2 r^2}{2}\sin^2\theta + V = \int \frac{dp}{\rho} = lg\log\rho + \text{const.},$$

n, θ ayant les mêmes significations que ci-dessus et V étant le potentiel des attractions des éléments matériels de la Terre et de l'atmosphère sur le point considéré m.

Soient R le rayon vecteur de la surface de la mer déterminé par la direction de r, et $r = R + h$; en négligeant l'aplatissement dû à la force centrifuge, h représentera la hauteur de m au-dessus de la mer, et, comme à une très faible hauteur la densité ρ est sensiblement nulle, h sera supposée une très petite fraction de r. Nous pourrons donc écrire, en désignant par V′ la valeur de V à la surface de la mer,

$$V = V' + \frac{dV'}{dr}h + \frac{d^2V'}{dr^2}\frac{h^2}{2}, \qquad r^2 = R^2 + 2Rh,$$

et nous aurons, par suite,

$$lg\log\rho = V' + \frac{n^2R^2\sin^2\theta}{2} + h\left(\frac{dV'}{dr} + n^2R\sin^2\theta\right) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2V'}{dr^2}.$$

(¹) La pression de 1^{atm} sur 1^{mq} étant 10336^{kgr} et le poids du mètre cube d'air $1^{kgr},3$ à 0^{o}, on a

$$l = \frac{10336}{1,3} = 7955^{m},$$

soit $\frac{1}{807}$ du rayon terrestre.

Or, à la surface de la mer, on a

$$V' + \frac{n^2 R^2 \sin^2\theta}{2} = \text{const.}$$

d'autre part, $-\left(\frac{dV'}{dr} + n^2 R \sin^2\theta\right)$ est l'expression de la pesanteur apparente g' aux différents points de cette même surface. Quant à la dérivée seconde $\frac{d^2V}{dr^2}$, comme elle est multipliée par le facteur très petit $\frac{h^2}{2}$, on peut la calculer en négligeant la force centrifuge, c'est-à-dire comme si la Terre était composée de couches sphériques homogènes, ce qui revient à poser, en désignant par M_1 la masse de la Terre,

$$-\frac{dV'}{dr} = \frac{M_1}{R^2},$$

$$-\frac{d^2V'}{dr^2} = -\frac{2M_1}{R^3} = -\frac{2g}{R} = -\frac{2g'}{R}.$$

Il vient donc

$$lg \log\rho = -g'h\left(1 + \frac{h}{R}\right) + \text{const.},$$

d'où

$$\rho = \Pi E^{-\frac{g'}{lg}\left(1+\frac{h}{R}\right)h} = \Pi E^{\left[-\frac{h}{lg}(g'-g) - \frac{h}{l}\right]\left(1+\frac{h}{R}\right)},$$

E étant la base du système de logarithmes népériens et Π la densité de l'air à la surface de la mer.

On voit ainsi que les couches d'air de même densité sont partout également élevées au-dessus de la surface de la mer aux quantités près de l'ordre $\frac{h}{lg}(g' - g)$ qui, dans le calcul de la hauteur des montagnes, ne doivent pas être négligées. Mais, pour l'objet que nous avons en vue, nous pouvons supposer $\frac{g'}{g} = 1$ et négliger $\frac{h}{R}$ devant l'unité, ce qui revient à poser

$$\rho = \Pi E^{-\frac{h}{l}}. \tag{1}$$

On déduit de là

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{d\rho}{dh} = -\frac{\rho}{l}. \tag{1'}$$

Comme au Chapitre VI et pour les mêmes motifs, nous ferons abstrac-

tion, dans ce qui suit, des attractions mutuelles des molécules de l'atmosphère.

151. Loi des petites oscillations de l'atmosphère. — Comme aux n^os^ **132** et suivants, nous prendrons pour unité le rayon moyen de la surface d'équilibre de la mer sous l'action de la pesanteur et de la force centrifuge; les lettres u, v, z continueront à représenter les déplacements de la surface de la mer, et nous les accentuerons pour caractériser des déplacements semblables d'un point quelconque de la couche gazeuse qui recouvre cette surface. Nous pourrons supposer $a' = 1$ dans la formule (A) du n° **131** aux termes près de l'ordre des produits des déplacements par la petite hauteur h; nous devrons faire, dans la même formule, $\rho' = \frac{p'}{lg}$; nous continuerons à représenter par V le potentiel qui se rapporte aux attractions du Soleil et de la Lune. La formule précitée deviendra ainsi

$$-\left[2n\left(\cos\theta\frac{du'}{dt}+\sin\theta\frac{dz'}{dt}\right)+\frac{d^2v'}{dt^2}\right]\sin\theta\,d\varpi$$
$$+\left(2n\cos\theta\frac{dv'}{dt}-\frac{d^2u'}{dt^2}\right)d\theta-g\,dz'+dV=gl\,d\log p'.$$

La pression p' étant très peu différente de celle p qui convient à l'équilibre sans l'intervention des astres, nous poserons

$$p'=p(1+q),$$

q étant une petite fraction dont nous négligerons le carré, et nous aurons en conséquence

$$\log p'=\log p+q;$$

par suite,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&-\left[2n\left(\cos\theta\frac{du'}{dt}+\sin\theta\frac{dz'}{dt}\right)+\frac{d^2v'}{dt^2}\right]\sin\theta\,d\varpi\\&+\left(2n\cos\theta\frac{dv'}{dt}-\frac{d^2u'}{dt^2}\right)d\theta+dV=g\,d(z'+lq).\end{aligned}\right.$$

La différentielle totale de l'élément de masse $\rho r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\varpi$ par

rapport à la caractéristique δ, abstraction faite du facteur $r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\varpi$, est

$$\delta\rho+\rho\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr^2\,\delta r}{dr}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\,\delta\theta\sin\theta}{d\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\,\delta\varpi}{d\varpi}\right).$$

On obtiendra l'équation de continuité en l'égalant à zéro, après y avoir fait $\delta\rho=\rho'-\rho$, $\delta r=z'$, $\delta\theta=\frac{u'}{r}$, $\delta\varpi=\frac{v'}{r\sin\theta}$, ce qui donnera

$$\rho'-\rho+\frac{\rho}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{dr^2z'}{dr}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{du'\sin\theta}{d\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{dv'}{d\varpi}\right)=0$$

Or nous avons

$$\rho' lg=p'=p(1+q)=\rho lg(1+q),$$

d'où

$$\rho'-\rho=\rho q$$

et, par suite,

$$(3)\qquad lq=-\frac{l}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{dr^2z'}{dr}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{du'\sin\theta}{d\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{dv'}{d\varpi}\right).$$

Supposons, sauf à voir si la suite des calculs ne s'y oppose pas, que : 1° les molécules situées sur un même rayon, lors de l'équilibre, restent constamment en ligne droite avec le centre de la Terre dans l'état de mouvement; 2° le déplacement suivant le rayon soit le même que celui de la mer ou que $z'=z$; ce déplacement sera négligeable devant u' et v', comme devant u et v; 3° les rapports $\frac{u'}{r}$, $\frac{v'}{r}$ soient indépendants de r; les équations (2) et (3) deviennent, en faisant en outre $r=1$ dans la seconde,

$$(4)\qquad\begin{cases}-\left(2n\cos\theta\dfrac{du'}{dt}+\dfrac{d^2v'}{dt^2}\right)\sin\theta\,d\varpi\\ +\left(2n\cos\theta\dfrac{dv'}{dt}-\dfrac{d^2u'}{dt^2}\right)d\theta+dV=g\,d(z'+lq),\end{cases}$$

$$(5)\qquad lq=-\frac{l}{\sin\theta}\left(\frac{du'\sin\theta}{d\theta}+\frac{dv'}{d\varpi}\right).$$

L'équation (4), en vertu de l'indépendance des différentielles de θ et ϖ, se décomposera en deux autres qui, jointes à l'équation (5), permettront de déterminer u', v' et lq.

152. Variations de la hauteur barométrique. — La hauteur barométrique est proportionnelle à la pression de l'air sur la surface du

mercure. Mais cette surface est exposée à l'action des couches de niveau qui s'élèvent ou qui s'abaissent avec la surface de la mer. Aussi, la hauteur barométrique varie avec p : 1° parce que cette densité est celle d'une couche de niveau qui, dans l'état d'équilibre, était moins élevée de z, d'où la variation $-z\frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho}{l}z$ de ρ; 2° parce que la densité d'une couche varie dans l'état de mouvement de lq. La variation totale éprouvée par la densité est donc ainsi

$$\frac{\rho}{l}(z + lq). \tag{6}$$

Si donc on désigne par k la hauteur barométrique correspondant à l'état d'équilibre, les oscillations du mercure seront représentées par

$$\frac{k}{l}(z + lq) \tag{7}$$

et auront ainsi la même valeur pour toutes les hauteurs au-dessus d'un même point du niveau de la mer, tant que la raréfaction de l'air ne sera pas trop forte.

153. Hypothèse d'une mer d'une profondeur constante. — Soit γ cette profondeur et posons

$$\begin{aligned}(l-\gamma)u' + \gamma u &= lu'',\\ (l-\gamma)v' + \gamma v &= lv'',\\ (l-\gamma)lq + lz &= lz''.\end{aligned}$$

Les équations (4) et (5), en ayant égard aux équations (1) du n° **132**, donnent

$$-\left(2n\cos\theta\frac{du''}{dt} + \frac{d^2v''}{dt^2}\right)\sin\theta\,d\varpi + \left(2n\cos\theta\frac{dv''}{dt} - \frac{d^2u''}{dt^2}\right)d\theta = g\,dz'' - d\mathrm{V}. \tag{8}$$

$$z = -\frac{1}{l\sin\theta}\left(\frac{du''\sin\theta}{d\theta} + \frac{dv''}{d\varpi}\right). \tag{9}$$

Ces équations sont celles des oscillations d'une mer dont la profondeur l est constante, et l'on est ramené ainsi à une question que nous avons étudiée plus haut.

L'expression (7), qui donne les oscillations de la hauteur barométrique, prend la forme suivante :

$$\frac{k(lz'' - \gamma z)}{l(l-\gamma)}. \tag{10}$$

154. Application. — Pour nous faire une idée des oscillations de la colonne barométrique, nous supposerons que la température est telle (1) que l'on ait

$$l = \frac{1}{722,5},$$

qui est l'une des profondeurs pour lesquelles nous avons donné au n° **142** les valeurs de z. Celle de ces valeurs qui correspond au cas actuel représentera le produit de z'' par le rayon terrestre, c'est-à-dire par $6\,366\,200^{m}$.

Nous supposerons de plus

$$\gamma = 2l = \frac{1}{361,25},$$

ce qui est encore une des profondeurs considérées au même numéro. La valeur obtenue pour z sera celle du z des formules (8) et (9), également multipliée par la longueur en mètres du rayon terrestre. En ayant égard à ces diverses valeurs de l, γ, z'', z, et supposant $k = 0^{m},76$, on aura, pour déterminer les oscillations barométriques,

$$\begin{aligned}\frac{k(lz''-\gamma z)}{l(l-\gamma)} &= \frac{k}{l}(2z - z'')\\ &= 0,000010623\,\frac{1+3\cos 2\theta}{3}\left(\sin^2 \nu - \tfrac{1}{2}\cos^2\nu + 3\sin^2\nu' - \tfrac{3}{2}\cos^2\nu'\right)\\ &\quad + 0,000010623\sin^2\theta\left[\cos^2\nu\cos 2(nt+\varpi-\psi) + 3\cos^2\nu'\cos 2(nt+\varpi-\psi')\right]\\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1,0000 - 4,6952\sin^2\theta - 2,9342\sin^4\theta - 0,6922\sin^6\theta \\ - 0,0899\sin^8\theta - 0,0076\sin^{10}\theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Si l'on suppose le Soleil et la Lune en conjonction ou en opposition dans le plan de l'équateur, on trouve $0^{mm},6305$ pour la différence entre la plus grande élévation de pression de la colonne mercurielle.

---

(1) Soit environ 28°.

155. Vent produit par le Soleil et la Lune. — L'attraction du Soleil et de la Lune doit produire un vent correspondant au flux et au reflux de la mer. Proposons-nous de déterminer l'intensité de ce vent à l'équateur dans les conditions particulières que nous venons d'étudier.

L'équation (4) donne, en y faisant $\theta = 90$,

$$(11) \qquad \frac{d^2\varphi'}{dt^2} = -g\frac{d}{d\varpi}(z + lq) + \frac{dV}{d\varpi} = -g\frac{d}{d\varpi}(2z - z'') + \frac{dV}{d\varpi}.$$

Mais on a, en se reportant aux nos **133** et **142**,

$$V = \frac{3M}{4A^3}[\cos^2 v \cos 2(nt + \varpi - \psi) + 3\cos^2 v' \cos 2(nt + \varpi - \psi')]$$
$$= 0,12316\,g\,[\cos^2 v \cos 2(nt + \varpi - \psi) + 3\cos^2 v' \sin 2(nt + \varpi - \psi)],$$
$$\frac{dV}{d\varpi} = -0,12316.2\,g\,[\cos^2 v \sin 2(nt + \varpi - \psi) + 3\cos^2 v' \sin 2(nt + \varpi - \psi')].$$

L'équation (10) devient par suite, en y remplaçant z, z'' par leurs valeurs,

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} = -1,0369.2\,g\,[\cos^2 v \sin 2(nt + \varpi - \psi) + 3\cos^2 v' \sin 2(nt + \varpi - \psi')].$$

On déduit de là par une intégration, en considérant v, v', ψ, ψ' comme constants et désignant par H une constante arbitraire,

$$d\varphi' = H\,dt + \frac{g}{n^2}n\,dt.1'',0369[\cos^2 v \cos 2(nt + \varpi - \psi) + 3\cos^2 v' \cos 2(nt + \varpi - \psi')].$$

Si dt représente une seconde, $n\,dt$ sera environ la cent-millième partie d'une circonférence; de plus $\frac{n^2}{g}$ est $\frac{1}{289}$ du rayon terrestre que nous avons pris pour unité et que nous introduirons explicitement dans la formule ci-dessus, en le désignant par R; nous aurons ainsi

$$R\,d\varphi' = RH\,dt + 0^m,01883[\cos^2 v \cos 2(nt + \varpi - \psi) + 3\cos^2 v' \cos 2(nt + \varpi - \psi')].$$

Si la constante H n'était pas nulle, il se produirait à l'équateur un vent constant, et l'on aurait une explication des vents alizés; mais, comme cette constante dépend des conditions initiales du mouvement, elle a dû disparaître depuis longtemps, par suite des résistances déve-

loppées dans le mouvement oscillatoire de l'air; on conclut de là que les vents alizés ne sont pas dus à l'action du Soleil et de la Lune sur l'atmosphère.

Lorsque les deux astres sont en conjonction ou en opposition dans l'équateur, on trouve $R\,dv' = 0^m,07532$ pour le maximum de l'espace parcouru par l'air dans une seconde, vitesse trop faible pour ne pas échapper à l'observation.

Si la mer n'existait pas, le mouvement oscillatoire de l'atmosphère suivrait la même loi que celui d'une mer d'une profondeur constante (n° 140), et les oscillations de la seconde espèce disparaîtraient. Elles disparaîtront également ou deviendront insensibles lorsque l'atmosphère recouvrira une mer dans laquelle ces oscillations seront nulles ou très petites, comme cela a lieu dans nos ports.

156. Résultats de l'observation. — La variation de la hauteur barométrique due au flux solaire redevenant toujours la même à la même heure, ce flux doit se confondre avec la variation diurne sans qu'on puisse l'en distinguer. Il n'en est pas de même des variations barométriques dues au flux lunaire, qui, se réglant sur les heures lunaires, ne redeviennent les mêmes aux mêmes heures solaires qu'après un demi-mois lunaire. Laplace, en discutant les résultats des observations faites par Bouvard à l'Observatoire de Paris aux syzygies et aux quadratures du 1er octobre 1815 au 1er octobre 1823, en remarquant que les flux lunaires partiels dépendent de la déclinaison et de la parallaxe de la Lune, a trouvé $\frac{1}{18}$ de millimètre pour l'amplitude du flux total, et $3\frac{1}{3}$ heures pour l'instant de son maximum du soir aux syzygies. Il a pris pour point de départ la formule empirique du n° 147, qui se rapporte au flux de la mer, et il a reconnu que la probabilité avec laquelle les observations de Bouvard indiquent un flux lunaire atmosphérique est de $\frac{337}{338}$.

CHAPITRE VIII.

MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES AUTOUR DE LEUR CENTRE DE GRAVITÉ.

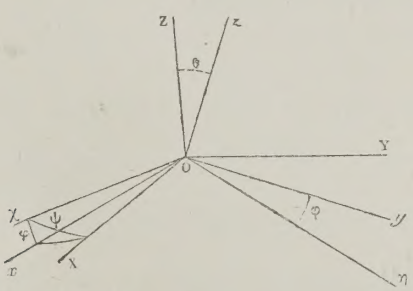
§ I. — Rappel des équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

157. Soient (*fig.* 21)

OX, OY, OZ trois axes rectangulaires de directions invariables passant par ce point;

A, B, C les moments d'inertie du corps par rapport à ses trois axes principaux Ox, Oy, Oz;

Fig. 21.



p, q, r les composantes, suivant ces derniers axes, de la rotation instantanée; ces composantes sont censées positives lorsqu'elles ont lieu de la droite vers la gauche, en supposant que l'on ait les pieds en O;

$O\chi$, $O\eta$ les traces sur XOY des plans xOy, ZOz; il est évident que $O\chi$ est perpendiculaire au second de ces plans et par suite à $O\eta$;

φ, ψ, θ les angles $\widehat{\chi Ox}$, $\widehat{\chi OX}$, $\widehat{ZOz}$, ce dernier angle étant aussi celui qui est compris sous les plans xOy et XOY;

$\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ les projections sur Ox, Oy, Oz du moment, par rapport au point O, des forces extérieures qui sollicitent le corps.

Nous avons

$$(A)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (B - C)qr = \mathfrak{M}_x, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (C - A)rp = \mathfrak{M}_y, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (A - B)pq = \mathfrak{M}_z; \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -p\cos\varphi + q\sin\varphi, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\cot\theta + r, \\ r = \dfrac{d\varphi}{dt} - \cos\theta\dfrac{d\psi}{dt}\ (^1). \end{cases}$$

---

(1) On trouvera une démonstration très simple des trois premières de ces formules à la page 340 du tome I de notre *Traité de Mécanique générale*, où l'on devra remplacer n, p, q, $\mathfrak{M}$ respectivement par $-p$, $-q$, $-r$, $-\mathfrak{M}$, par suite du changement de notation et de convention relativement au sens des rotations positives. Les autres formules se déduisent de celles du n° 43 du même volume; mais, comme les changements de notations et de sens des rotations pourraient donner lieu à quelques difficultés, nous croyons devoir les établir directement.

Les rotations p et q donnent les composantes

$$\chi = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \quad \text{suivant } O\chi,$$
$$\eta = p\sin\varphi + q\cos\varphi, \quad \text{» } O\eta.$$

Cette dernière se décompose en ces deux autres : l'une,

$$Z = -\frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta}, \quad \text{suivant } OZ;$$

l'autre,

$$z = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\cot\theta, \quad \text{suivant } Oz,$$

à laquelle il faut ajouter r.

Or, dans un temps infiniment petit, les composantes χ, Z, z ont pour effet de faire varier respectivement θ de $-d\theta$, ψ de $-d\psi$, φ de $d\varphi$. Nous avons donc

$$-\frac{d\theta}{dt} = p\cos\varphi - q\sin\varphi = \chi,$$
$$-\frac{d\psi}{dt} = -\frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta} = Z,$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\cot\theta + r = z;$$

d'où les formules du texte.

On remarquera que l'on a aussi

$$\eta = \sin\theta\frac{d\psi}{dt}, \quad z = r + \cos\theta\frac{d\psi}{dt} = r + \eta\cot\theta.$$

§ II. — Du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

158. Les phénomènes relatifs à la précession des équinoxes et à la nutation font connaître que la Terre, dans son mouvement autour de son centre de gravité, ne tourne pas autour d'un axe absolument fixe dans son intérieur, mais autour d'un axe instantané qui se déplace avec une extrême lenteur. Ce déplacement de la ligne des pôles peut-il être attribué à ce que, dès l'origine, l'axe de rotation ne coïncidait pas exactement avec un axe principal d'inertie? C'est ce que nous allons d'abord examiner sans faire intervenir les actions du Soleil et de la Lune, en supposant que l'angle formé par les deux axes reste constamment très petit, puisque, d'après les mesures géodésiques, la ligne des pôles diffère peu d'un axe de symétrie.

159. Du mouvement initial de la Terre autour de son centre de gravité. — Dans ce qui précède, nous supposerons que O est le centre de gravité de la Terre, que Oz est l'axe principal d'inertie qui diffère peu de la ligne des pôles, ou axe instantané de rotation, et que $\mathfrak{M} = 0$.

La composante r, sensiblement égale à la rotation de la Terre, est très grande par rapport aux composantes p et q, et si l'on néglige le produit de ces dernières, la troisième des équations (A) donne, pour la valeur approchée de r, une constante que nous désignerons par r_0. Au même degré d'approximation, nous pourrons faire $r = r_0$ dans les deux premières des mêmes équations qui ont par suite pour intégrales

$$(1) \qquad p = \mathrm{H} r_0 \sin(\alpha r_0 t + \varepsilon), \quad q = \mathrm{H} i r_0 \cos(\alpha r_0 t + \varepsilon),$$

en posant

$$(2) \qquad \alpha = \sqrt{\frac{(\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{B})}{\mathrm{AB}}}, \quad i = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}-\mathrm{B}}},$$

et en désignant par H et ε deux constantes dépendant uniquement des conditions initiales du mouvement.

Pour que p et q restent toujours très petits, comme on l'a supposé, ou que la ligne des pôles diffère constamment peu de l'axe Oz, il faut que α soit réel ou que C soit le plus grand ou le plus petit des moments

d'inertie principaux, et nécessairement le plus grand en raison de l'aplatissement de la Terre aux pôles.

Soient λ et ν les angles formés par le plan passant par Oz et la ligne des pôles avec zOx et la ligne des pôles avec Oz.

Nous avons

$$\cos\lambda = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{\sin(\alpha r_0 t+\varepsilon)}{\sqrt{\sin^2(\alpha r_0 t+\varepsilon)+i^2\cos^2(\alpha r_0 t+\varepsilon)}}, \tag{3}$$

$$\cos\nu = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}. \tag{4}$$

Pour obtenir l'angle ν qui est petit, il faut tenir compte dans r du terme du second ordre que nous avons négligé. De la troisième des formules (A), en ayant égard aux valeurs (1), on tire

$$r = r_0\left[1+\frac{A-B}{4C\alpha}H^2 i\cos 2(\alpha r_0 t+\varepsilon)\right].$$

Nous avons alors

$$\cos\nu = 1-\frac{H^2}{2}\left[1+i^2+\tfrac{1}{2}(i^2-1)\cos 2(\alpha r_0 t+\varepsilon)\right];$$

par suite

$$\nu^2 = H^2[1+i^2+\tfrac{1}{2}(i^2-1)\cos 2(\alpha r_0 t+\varepsilon)]. \tag{5}$$

La Terre étant très sensiblement un solide de révolution autour de Oz, les moments d'inertie A, B doivent différer très peu l'un de l'autre; chacun d'eux diffère davantage de C, mais encore d'une petite quantité, en raison du faible aplatissement aux pôles.

Il suit de là que l'on a à très peu près

$$\alpha = \frac{C-A}{C},$$

que $(i-1)$ est assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré; il suit de là que l'on a, aux termes en $(i-1)$ près,

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \alpha r_0 t - \varepsilon,$$

angle qui décroîtra très lentement.

L'équation (5) devient ainsi, en négligeant seulement les termes de l'ordre $(i-1)^2$,

$$\nu^2 = H^2[1+i^2-\tfrac{1}{2}(i^2-1)\cos 2\lambda] = \frac{H^2(1+i^2)}{1+\dfrac{i^2-1}{2(1+i^2)}\cos 2\lambda}.$$

Si l'on désigne par x, y les coordonnées de l'un ou l'autre des pôles parallèles à Ox, Oy, par 2R la distance des pôles, on déduit de cette dernière formule

$$x^2\left[1+\frac{i^2-1}{2(1+i^2)}\right]+y^2\left[1-\frac{i^2-1}{2(1+i^2)}\right]=2H^2(1+i^2),$$

On voit ainsi que chaque pôle devrait décrire une petite ellipse, d'une faible excentricité, sur la surface de la Terre, lentement et d'un mouvement uniforme rétrograde. Mais, comme les observations les plus précises n'ont pas accusé de déplacement semblable, on doit conclure que $H = 0$ et que les causes du mouvement initial ont disparu depuis longtemps.

Ainsi, sans l'action combinée du Soleil et de la Lune, le sphéroïde terrestre, en raison de sa non-sphéricité, tournerait autour de son plus petit axe d'inertie. Mais, cette cause perturbatrice ayant une faible intensité et étant périodique, les déplacements, par rapport à cet axe, éprouvés par l'axe instantané de rotation sont très faibles et la vitesse angulaire ne subit que des variations très petites et périodiques.

160. Du mouvement de la Terre en ayant égard à l'attraction du Soleil et de la Lune. — Nous devrons tenir compte de la variation de position qu'éprouve l'écliptique résultant de la réduction séculaire de son obliquité, déplacement qui est actuellement de 48″ et qui s'effectue cent fois plus lentement que le déplacement déjà si lent de la précession. Ces déplacements sont périodiques; mais, en raison de leur extrême lenteur, on peut, sans grande erreur et pour une très longue durée, les considérer comme s'effectuant d'un mouvement uniforme ou, avec une plus grande approximation, d'un mouvement uniformément varié. Nos observations sont d'ailleurs trop incomplètes pour fixer la longueur de la période, et nous ne pouvons que préciser les valeurs numériques des coefficients des premiers termes du développement suivant les puissances ascendantes du temps, approximation qui est très suffisante pour une période de onze à douze siècles.

Nous prendrons pour plan XOY le plan de l'écliptique relatif à une époque antérieure déterminée, qui sera pour nous l'origine du temps, et nous mesurerons la longitude à partir de l'équinoxe du printemps correspondant et par laquelle nous ferons passer l'axe OX.

Soient (*fig.* 21)

$\chi = -\frac{d\theta}{dt}$, $\eta = \sin\theta\frac{d\psi}{dt}$ les composantes suivant $O\chi$ et $O\eta$ de la rotation instantanée;

$\mathfrak{M}_\chi$, $\mathfrak{M}_\eta$, $\mathfrak{M}_z$ les moments des forces perturbatrices par rapport à $O\chi$, $O\eta$, Oz;

n la vitesse angulaire moyenne de la Terre autour de l'axe principal Oz, qui ne diffère de r et de la rotation instantanée que de quantités très petites de l'ordre de $\mathfrak{M}_\eta$, $\mathfrak{M}_\chi$, $\mathfrak{M}_z$, p, q, χ, η, dont nous négligerons les produits et les secondes puissances.

On a, par la composition des rotations,

$$p = \chi\cos\varphi + \eta\sin\varphi,$$
$$q = \eta\cos\varphi - \chi\sin\varphi,$$

et, pour les moments des quantités de mouvement par rapport à Ox, Oy,

$$Ap = A(\chi\cos\varphi + \eta\sin\varphi),$$
$$Bq = B(\eta\cos\varphi - \chi\sin\varphi).$$

Les moments pareils, relatifs à $O\chi$, $O\eta$, sont, par suite,

$$Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi = \chi\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}(\eta\sin 2\varphi + \chi\cos 2\varphi),$$

$$Ap\sin\varphi + Bq\cos\varphi = \eta\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}(\chi\sin 2\varphi - \eta\cos 2\varphi).$$

Il est évident que les axes mobiles Oz, $O\chi$, qui entraînent avec eux $O\eta$, ne se déplacent qu'en vertu des rotations $-\frac{d\theta}{dt} = \chi$ et $-\frac{d\psi}{dt}$ autour de Oz; mais cette dernière se décompose en deux autres, l'une, $\frac{d\psi}{dt}\sin\theta = \eta$, et l'autre, $-\frac{d\psi}{dt}\cos\theta$, autour de Oz; il ne faut pas perdre de vue que ces différentes rotations sont de l'ordre de p et q.

D'autre part, le moment total des quantités de mouvement par rapport à O, représenté par la droite OP (1), ne différant en grandeur de

(1) *Voir*, à ce sujet, les nos 56 et 104 de la seconde Partie de notre *Traité de Mécanique générale*, t. I. Il nous paraît utile de rappeler que l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'équateur est actuellement de 23°27′10″.

Cn et en direction de Oz que de quantités du même ordre, la vitesse d'entraînement du point P aura pour composantes

$$\begin{aligned} &Cn\eta, \quad \text{suivant } O\chi, \\ -&Cn\chi, \quad \text{» } O\eta. \end{aligned}$$

On a donc, en exprimant que la vitesse absolue du point P estimée suivant $O\chi$, $O\eta$ est égale au moment des forces extérieures, estimé de la même manière,

$$\frac{d}{dt}\left[\chi\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}(\eta\sin 2\varphi+\chi\cos 2\varphi)\right]+Cn\eta=\mathfrak{M}_\chi,$$
$$\frac{d}{dt}\left[\eta\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}(\chi\sin 2\varphi+\eta\cos 2\varphi)\right]-Cn\chi=\mathfrak{M}_\eta.$$

Or, η et χ étant indépendants de l'angle φ, on peut supprimer les termes en sinus et cosinus de 2φ qui n'introduiraient dans le déplacement de l'axe terrestre Oz que des termes dont la périodicité serait journalière et dont l'observation n'a pas constaté l'existence. Il résulte de là que la différence $A - B$ est très petite ou que la Terre (qui, d'après les mesures géodésiques, est à fort peu près un solide de révolution) est composée d'éléments matériels distribués sensiblement d'une manière uniforme autour de Oz.

En appelant A' la moyenne $\frac{A+B}{2}$ des moments principaux d'inertie relatifs à l'équateur, nous avons donc

$$A'\frac{d\chi}{dt}+Cn\eta=\mathfrak{M}_\chi,$$
$$A'\frac{d\eta}{dt}-Cn\chi=\mathfrak{M}_\eta.$$

Les mouvements déterminés par les rotations χ et η étant très lents relativement à la rotation moyenne n autour de Oz, les dérivées $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ sont très petites par rapport à n, η, χ, et nous pouvons dès lors écrire simplement

$$\eta=\frac{\mathfrak{M}_\chi}{Cn}, \quad \chi=-\frac{\mathfrak{M}_\eta}{Cn}. \tag{1}$$

Telles sont les équations dont nous ferons usage dans la question qui nous occupe.

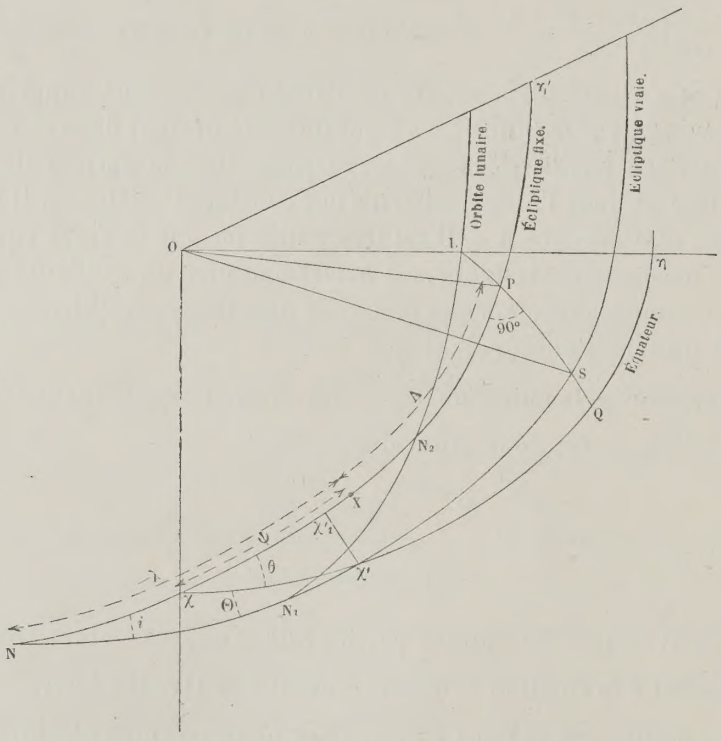
161. De l'action du Soleil. — Les formules (3) du n° **55** nous donnent, en remarquant que nous admettons ici que le sens positif des moments est de la droite vers la gauche,

$$\mathfrak{M}_x = 3m\frac{C-B}{a^3}yz, \quad \mathfrak{M}_y = -3m\frac{C-A}{a^3}xz,$$

dans ces expressions, m représente la masse du Soleil, x, y, z ses coordonnées par rapport à Ox, Oy, Oz, et a sa distance moyenne à la Terre.

Soient (*fig.* 22)

Fig. 22.



n' la vitesse angulaire moyenne du Soleil autour de la Terre;

x', y' les coordonnées du Soleil parallèles à $O\chi$, $O\eta$;

h le rapport de la masse de la Terre à celle du Soleil;

$\chi\eta$ le cercle déterminé par l'équateur dans la sphère d'un rayon égal à l'unité dont le centre est celui de la Terre;

$O\eta'$ la trace du plan de l'écliptique fixe sur le plan $zO\eta$, et $\chi\eta'$ le cercle déterminé par ce plan dans la sphère ci-dessus, cercle sur lequel nous marquerons par la lettre X l'équinoxe du printemps correspondant;

$\chi'S$ l'écliptique vraie coupant le cercle précédent au point N;

$\lambda = -NX$ la longitude du *nœud ascendant* N mesurée à partir de l'origine X;

$\Lambda = XP$ la longitude du Soleil;

i l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe;

ψ l'arc χX.

Ces deux derniers angles, qui ne dépendent que du déplacement de l'écliptique, restent très petits, et l'on peut, par suite, négliger leur produit et leurs secondes puissances.

Nous avons, d'après le n° 6,

$$m(1+h) = n'^2 a^3,$$

par suite,

$$\mathfrak{M}_x = \frac{3n'^2}{1+h}\frac{C-B}{a^2}yz, \quad \mathfrak{M}_y = -\frac{3n'^2}{1+h}\frac{C-A}{a^2}xz.$$

Nous avons aussi

$$\mathfrak{M}_\chi = \mathfrak{M}_x\cos\varphi - \mathfrak{M}_y\sin\varphi, \quad x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi,$$
$$\mathfrak{M}_\eta = \mathfrak{M}_x\sin\varphi + \mathfrak{M}_y\cos\varphi, \quad y = y'\cos\varphi - x'\sin\varphi.$$

En faisant abstraction des termes périodiques en $\sin 2\varphi$ et $\cos 2\varphi$ pour des motifs déjà connus, on déduit des formules précédentes

$$(2) \qquad \mathfrak{M}_\chi = \frac{3n'^2}{1+h}\frac{C-A'}{a^2}zy', \quad \mathfrak{M}_\eta = -\frac{3n'^2}{1+h}\frac{C-A'}{a^2}zx'.$$

Nous négligerons dorénavant devant l'unité la constante h, qui est au plus de $\frac{1}{350000}$ (n° 7).

En admettant que P soit la projection de S sur l'écliptique fixe et négligeant le carré de i, on a $OP = a$ et

$$x' = a\cos\chi P = a\cos(\Lambda + \psi).$$

L'ordonnée y'' de S ou P parallèle à $O\eta'$ a évidemment pour valeur

$$y'' = a\sin(\Lambda + \psi).$$

Enfin on a, pour l'ordonnée parallèle à OZ de S,

$$Z = -\overline{OS}\sin\widehat{SP} = a\sin\widehat{NP}\sin i = ai\sin(\Lambda - \lambda).$$

On déduit facilement de là, par une transformation de coordonnées dans le plan $\eta O z$,

$$\begin{aligned} y' &= a[\sin(\Lambda + \psi)\cos\theta + i\sin(\Lambda - \lambda)\sin\theta], \\ z &= a[\sin(\Lambda + \psi)\sin\theta - i\sin(\Lambda - \lambda)\cos\theta]. \end{aligned}$$

En portant les valeurs précédentes dans les formules (2), on trouve

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_\chi = \frac{3}{2}n'^2(C - A')[2\sin\theta\cos\theta\sin^2(\Lambda + \psi) \\ \qquad\qquad - i\cos 2\theta\cos\lambda + i\cos 2\theta\cos(2\Lambda - \lambda)], \\ \mathfrak{M}_\eta = -\frac{3}{2}n'^2(C - A')[\sin\theta\sin 2(\Lambda + \psi) \\ \qquad\qquad - i\cos\theta\sin(2\Lambda - \lambda) + i\cos\theta\sin\lambda)]. \end{cases}$$

Si, dans ces dernières formules, nous faisons abstraction des termes en sinus et cosinus de l'angle $\Lambda = n't$ ou de ses multiples donnant lieu à des déplacements annuels que n'accuse pas l'observation, elles deviennent

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_\chi = \frac{3}{2}n'^2(C - A')(-i\cos\lambda\cos 2\theta + \sin\theta\cos\theta), \\ \mathfrak{M}_\eta = -\frac{3}{2}n'^2(C - A')i\sin\lambda\cos\theta, \end{cases}$$

et les équations (1) se réduisent aux suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} \eta = \frac{3}{2}n'^2\dfrac{C - A'}{Cn}(-i\cos\lambda\cos 2\theta + \sin\theta\cos\theta) = \sin\theta\dfrac{d\psi}{dt}, \\ \chi = \frac{3}{2}n'^2\dfrac{C - A'}{Cn}i\sin\lambda\cos\theta = -\dfrac{d\theta}{dt}. \end{cases}$$

En négligeant les inégalités séculaires de l'écliptique, supposant, par suite, $i = 0$, la rotation χ serait nulle et l'angle θ aurait une valeur constante θ'; nous admettrons que cette constante est la valeur de θ qui se rapporte à l'origine convenue du temps.

Nous pourrons, sans erreur sensible, remplacer respectivement, dans les formules (5), $\sin\theta$ et $\cos\theta$ par $\sin\theta'$ et $\cos\theta'$.

Conformément à la remarque que nous avons faite au n° **160**, nous poserons

$$(6)\qquad i\sin\lambda = gt, \quad i\cos\lambda = g't,$$

en désignant par g, g' deux constantes positives ou négatives dont les valeurs absolues sont très petites. La seconde des équations (5) nous donnera alors, pour la mesure de la *nutation* due à l'action du Soleil,

$$\theta - \theta' = -\tfrac{3}{2} n'^2 \frac{C - A'}{Cn} \cos\theta' \frac{g t^2}{2} \tag{7}$$

et la première des mêmes équations, pour la *précession* correspondante,

$$\psi = \tfrac{3}{2} n'^2 \frac{C - A'}{Cn} \left(t \cos\theta' - \frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'} \frac{g' t^2}{2} \right). \tag{7'}$$

162. De l'action de la Lune. — Soient (*fig.* 22)

L la position de la Lune, que nous supposerons, pour simplifier la figure, située sur le grand cercle PSQ;

N_1, N_2 les intersections de l'orbite lunaire avec l'écliptique vraie et l'écliptique fixe;

$\lambda_1 = N_2X$ la longitude du nœud descendant N_2;

$\Lambda_1 = XP$ la longitude de la Lune;

I, i_1 les inclinaisons de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie et l'écliptique fixe;

n'_1 la vitesse angulaire de la Lune autour de la Terre;

h_1 le rapport de la masse de la Terre à celle de la Lune, qui (n° 8) est peu différent de 75 unités.

L'angle I est petit et diffère actuellement peu de 5°8′48″; il en est par suite de même de l'angle i_1, dont on peut ainsi négliger la seconde puissance.

Les formules (5) peuvent donc ici recevoir leur application, en y remplaçant θ par θ', λ par λ_1, n' par n'_1, i par $-i_1$, et en introduisant au dénominateur le facteur $1 + h_1$, dont l'équivalent pour le Soleil a été remplacé par l'unité. On a, de cette manière,

$$\begin{cases} \tau_1 = \tfrac{3}{2} n'^2_1 \dfrac{C - A'}{Cn(1 + h_1)} (i_1 \cos\lambda_1 \cos 2\theta' + \sin\theta' \cos\theta'), \\ \chi = -\tfrac{3}{2} n'^2_1 \dfrac{C - A'}{Cn(1 + h_1)} i_1 \sin\lambda_1 \cos\theta'. \end{cases} \tag{8}$$

Nous allons maintenant chercher à exprimer i_1 au moyen de I. La

figure nous donne

$$\mathrm{LP} = i_1 \sin \mathrm{N_2P} = i_1 \sin(\Lambda_1 - \lambda_1),$$

$$\mathrm{LP} = \mathrm{LS} - \mathrm{SP} = \mathrm{I} \sin \mathrm{N_1S} - i \sin \mathrm{NS}$$
$$= \mathrm{I} \sin \mathrm{N_2P} - i \sin \mathrm{NP} = \mathrm{I} \sin(\Lambda_1 - \lambda_1) - i \sin(\Lambda_1 - \lambda),$$

d'où, en égalant ces deux valeurs,

$$i_1 \sin(\Lambda_1 - \lambda_1) = \mathrm{I} \sin(\Lambda_1 - \lambda_1) - i \sin(\Lambda_1 - \lambda).$$

En faisant successivement dans cette formule $\Lambda_1 = 0$ et $\Lambda_1 = 90^\circ$, on trouve, en ayant égard aux valeurs (6),

$$i_1 \sin\lambda_1 = \mathrm{I} \sin\lambda_1 - i \sin\lambda = \mathrm{I} \sin\lambda_1 - gt,$$

$$i_1 \cos\lambda_1 = \mathrm{I} \cos\lambda_1 - i \cos\lambda_1 = \mathrm{I} \cos\lambda_1 - g't.$$

Soient α la vitesse angulaire, sensiblement constante et rétrograde, du nœud $\mathrm{N_2}$ ou $\mathrm{N_1}$ qui correspond à une révolution en dix-huit ans $\frac{2}{3}$ environ, et λ_0 une constante; on peut écrire

$$\lambda_1 = -(\alpha t + \lambda_0);$$

et, en posant

$$\frac{n_1'^2}{1 + h_1} = n'^2 \omega \quad (1), \tag{9}$$

les formules (8) deviennent

$$\eta = \sin\theta' \frac{d\psi}{dt} = \tfrac{3}{2} n'^2 \frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}'}{\mathrm{C}n} \omega \left[\mathrm{I} \cos(\alpha t + \lambda_0) \cos 2\theta' - g't \cos 2\theta' + \sin\theta' \cos\theta'\right],$$

$$\chi = -\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{3}{2} n'^2 \frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}'}{\mathrm{C}n} \omega \cos\theta' \left[\mathrm{I} \sin(\alpha t + \lambda_0) + gt\right],$$

d'où, en intégrant,

$$\begin{cases} \psi - \psi_1 = \tfrac{3}{2} n'^2 \dfrac{\mathrm{C} - \mathrm{A}'}{\mathrm{C}n} \omega \left(t \cos\theta' - \dfrac{\mathrm{I}}{\alpha} \sin\lambda_1 \dfrac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'} - g' \dfrac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'} \dfrac{t^2}{2} \right), \\ \theta - \theta' = \theta_1' - \theta' + \tfrac{3}{2} n'^2 \dfrac{\mathrm{C} - \mathrm{A}'}{\mathrm{C}n} \omega \cos\theta' \left(\dfrac{\mathrm{I}}{\alpha} \cos\lambda_1 - \dfrac{gt^2}{2} \right), \end{cases} \tag{10}$$

(1) On a, d'après Laplace,

$$\omega = 2,35333.$$

expressions dans lesquelles on a

$$(a)\qquad \begin{cases} \psi_1 = \dfrac{3n'^2}{2}\,\dfrac{C-A'}{Cn}\,\omega\,\dfrac{I}{\alpha}\sin\lambda_0\,\dfrac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}, \\ \theta'_1 = \theta' - \dfrac{3n'^2}{2}\,\dfrac{C-A'}{Cn}\,\omega\,\dfrac{I}{\alpha}\cos\lambda_0. \end{cases}$$

163. Effet total des actions simultanées du Soleil et de la Lune. — En faisant la somme des valeurs de ψ et $(\theta - \theta')$ fournies par les équations (7'), (7) et (10), on trouve

$$(11)\qquad \begin{cases} \psi - \psi_1 = \frac{3}{2}n'^2\,\dfrac{C-A'}{Cn}\cos\theta'\left[(1+\omega)\,t - \dfrac{2\omega}{\alpha}\,I\sin\lambda_1\cot 2\theta' - g'(1+\omega)\cot 2\theta'.t^2\right], \\ \theta - \theta'_1 = \frac{3}{2}n'^2\,\dfrac{C-A'}{Cn}\cos\theta'\left[\dfrac{\omega}{\alpha}\,I\cos\lambda_1 - g'(1+\omega)\,\dfrac{t^2}{2}\right]. \end{cases}$$

164. Nutation. — En négligeant les inégalités séculaires de l'écliptique, on a simplement

$$(11')\qquad \begin{cases} \psi - \psi_1 = \frac{3}{2}n'^2\,\dfrac{C-A'}{Cn}\cos\theta'\left[(1+\omega)\,t - \dfrac{2\omega}{\alpha}\,I\sin\lambda_1\cot 2\theta'\right], \\ \theta - \theta'_1 = \frac{3}{2}n'^2\,\dfrac{C-A'}{Cn}\,\omega\,\dfrac{I\cos\lambda_1}{\alpha}\cos\theta'. \end{cases}$$

Si I était nul, la ligne des pôles, que nous représenterons par OA, et qui sera pour nous l'*axe moyen* de la Terre, décrirait, autour de la perpendiculaire OZ au plan de l'écliptique, un cône de révolution avec la vitesse angulaire

$$\frac{3}{2}n'^2\,\frac{C-A'}{Cn}\,(1+\omega)\cos\theta'.$$

Le déplacement de l'axe réel OB par rapport au plan ZOA et à OA se compose ainsi des deux déplacements angulaires suivants :

$$-3n'^2\,\frac{C-A'}{Cn}\,\omega\,\frac{I}{\alpha}\sin\lambda_1\cos\theta'\cot 2\theta',$$

$$\frac{3}{2}n'^2\,\frac{C-A'}{Cn}\,\omega\,\frac{I}{\alpha}\cos\lambda_1\cos\theta',$$

respectivement perpendiculaires au plan ci-dessus et compris dans ce plan.

Le pôle vrai B est ainsi animé par rapport au pôle moyen A de deux mouvements rectangulaires périodiques et complémentaires. Il décrit donc par suite autour de A une petite ellipse dans le même temps que les nœuds de l'orbite lunaire accomplissent une révolution, soit en dix-huit ans $\frac{2}{3}$. Cette ellipse a été observée pour la première fois par Bradley, à qui on doit la découverte de la nutation (1742-47).

La valeur de θ' pour l'année 1882 étant de $23°27'10''$, on a, pour le rapport des deux diamètres principaux de l'ellipse,

$$2\cot 2\theta' \sin\theta' = \frac{\cos 2\theta'}{\cos\theta'} = 0,7446,$$

chiffre qui diffère très peu de celui de 0,7462 qui est donné par l'observation et le plus grand des deux diamètres est celui qui est dirigé vers le pôle de l'écliptique.

165. Déplacements séculaires de la Terre rapportés à l'écliptique vraie. — Pour comparer la théorie à l'observation, il faut rapporter l'axe de la Terre à l'écliptique vraie.

Si nous laissons de côté l'influence de la rétrogradation périodique des nœuds de l'orbite lunaire, ou les termes en I, pour ne nous occuper que des déplacements séculaires, les formules (11) se réduisent aux suivantes :

$$(12)\qquad \begin{cases} \psi = \frac{3}{2} n'^2 \dfrac{C - A'}{Cn} (1+\omega)\cos\theta' (t - g' \cot 2\theta' t^2), \\ \theta - \theta' = -\frac{3}{2} n'^2 \dfrac{C - A'}{Cn} (1+\omega)\cos\theta' \dfrac{g t^2}{2}. \end{cases}$$

Soient

Θ l'inclinaison de l'équateur;
$\chi' X = \Psi$ la longitude de l'équinoxe vrai χ', prise en valeur absolue;
$\Delta = \chi\chi'$, $\Theta - \theta = \delta\theta$, $\Psi - \psi = \delta\psi$.

Le triangle sphérique $\chi\chi' N$ donne

$$\cos\Theta = \cos(\theta + \delta\theta) = \cos\theta\cos i + \sin\theta \sin i \cos(\psi + \lambda),$$

d'où, en ne conservant que les deux premières puissances des angles

et $\delta\theta$, qui sont censés être du même ordre de grandeur que ψ,

$$\begin{aligned}\delta\theta &= \frac{i^2}{2}\cot\theta - i\cos(\psi+\lambda) - \cot\theta\frac{\delta\theta^2}{2}\\ &= \frac{i^2}{2}\cos\theta - i\cos(\psi+\lambda) - \frac{i^2}{2}\cot\theta\cos^2(\psi+\lambda)\\ &= \frac{i^2}{2}\cot\theta\sin^2(\psi+\lambda) - i\cos(\psi+\lambda);\end{aligned}$$

par suite,

$$(13)\qquad \begin{cases}\Theta = \theta - i\cos(\psi+\lambda) + \dfrac{i^2}{2}\sin^2(\psi+\lambda)\cot\theta\\ \quad = \theta - i\cos\lambda + \psi i\sin\lambda + \dfrac{\cot\theta}{2}i^2\sin^2\lambda.\end{cases}$$

Le même triangle sphérique donne aussi

$$\sin\Delta \quad \text{ou} \quad \Delta = -\frac{\sin(\psi+\lambda)\sin i}{\sin\Theta} = -\frac{i\sin(\psi+\lambda)}{\sin\theta - i\cos\theta\cos(\psi+\lambda)}$$

ou

$$(14)\qquad \Delta = -\frac{i\sin(\psi+\lambda)}{\sin\theta} - \frac{i^2\sin 2(\psi+\lambda)\cos\theta}{2\sin^2\theta}.$$

Enfin on a, en considérant le triangle sphérique rectangle $\chi\chi'\chi_1'$,

$$\operatorname{tang}(\psi - \Psi) = -\delta\psi = \operatorname{tang}\Delta\cos\theta = \Delta\cos\theta,$$

d'où

$$(15)\qquad \begin{cases}\Psi = \psi + i\sin(\psi+\lambda)\cot\theta + \dfrac{i^2}{2}\sin 2(\psi+\lambda)\cot^2\theta\\ \quad = \psi + \psi i\cos\lambda\cot\theta + i\sin\lambda\cot\theta + i^2\sin\lambda\cos\lambda\cot^2\theta.\end{cases}$$

Nous avons dû conserver les termes du second ordre en i et ψ dans les valeurs de Θ et Ψ, puisque nous poussons l'approximation jusqu'aux termes dépendant du carré du temps. Par la même raison, nous devrons employer pour $i\sin\lambda$ et $i\cos\lambda$ des expressions de la forme

$$(6')\qquad i\sin\lambda = gt + kt^2, \quad i\cos\lambda = g't + k't^2,$$

k et k' étant deux nouvelles constantes.

Les formules (13) et (15) deviennent ainsi

$$(13')\qquad \Theta = \theta - g't + \psi gt + \left(\frac{g^2}{2}\cot\theta - k'\right)t^2,$$

$$(15')\qquad \Psi = \psi + \cot\theta\, gt + \psi\cot\theta\, g't + \cot\theta\,(gg'\cot\theta + k)\,t^2.$$

Si nous posons

$$\zeta = \tfrac{3}{2} n'^2 \frac{C - A'}{Cn} (1 + \omega) \cos\theta', \tag{16}$$

les équations (12) se réduisent aux suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} \psi &= \zeta (t - g' \cot 2\theta' t^2), \\ \theta &= \theta' - \frac{\zeta g t^2}{2}. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Nous avons donc enfin

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi &= (\zeta + g \cot\theta') t + \left(\frac{\zeta g'}{\sin 2\theta'} + g g' \cot^2\theta' + k \cot\theta' \right) t, \\ \Theta &= \theta' - g' t + \left(\frac{\zeta g}{2} + \frac{g^2}{2} \cot^2\theta' - k' \right) t^2. \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Les quantités ζ, θ', g, g', k, k' sont censées exprimées en nombres. Si, comme dans ce qui suit, nous prenons la seconde d'arc pour unité, les termes du second ordre en ζ, g, g' devront être multipliés par

$$\frac{2\pi}{360 \times 3600}.$$

166. Formules numériques. — Nous conviendrons de mesurer le temps à partir de 1850; les valeurs de t pour les années antérieures seront considérées comme étant négatives. Nous prendrons pour unité du temps l'année julienne, qui est de 365,25 jours solaires moyens. La quantité ζ, qui dépend des moments d'inertie principaux de la Terre, ne peut être déterminée que par l'observation, de même que g, g', k, k'.

Le Verrier, en discutant les résultats obtenus par Peters, est arrivé, pour 1850 ou pour $t = 0$, aux chiffres suivants :

$$\begin{aligned} \theta' &= 23^\circ 27' 32'', \\ \zeta &= 50'', 23572, \\ g &= 0'', 05888, \\ g' &= -0'', 47566, \\ k &= 0'', 00001964, \\ k' &= 0'', 00000568, \\ \alpha &= 9'', 223, \end{aligned}$$

valeurs qui peuvent convenir avec une assez grande approximation pour une période de mille à douze cents ans avant et après l'origine du temps, en supposant t négatif dans le premier cas.

On déduit de là et des formules (18)

$$\Psi = 50'',37140\,t - 0,00008861\,t^2,$$
$$\Theta = 23^\circ 27' 32'' + 0'',47566\,t + 0,000001149\,t^2.$$

167. Invariabilité de la durée de la rotation de la Terre. — La durée de cette rotation est donnée par l'équation

$$\frac{dr}{dt} + \frac{A - B}{C}\,pq = \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{C}.$$

Nous avons

$$p = \chi \cos\varphi + \eta \sin\varphi,$$
$$q = \eta \cos\varphi - \chi \sin\varphi,$$
$$pq = \chi\eta \cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}(\eta^2 - \chi^2)\sin 2\varphi.$$

En nous rappelant (n^{os} **161** et **162**) que χ et η sont indépendants de φ, le produit pq sera périodique et sa période sera de un demi-jour. Ce produit peut donc être négligé dans l'équation ci-dessus; car, en outre, les longues périodes de η, χ ne peuvent pas avoir d'influence sensible sur l'intégration. Considérons, par exemple, le terme de $\partial \mathfrak{M}_z$ qui dépend de l'attraction du Soleil ou posons

$$\partial \mathfrak{M}_z = 3n^2 \frac{A - B}{a^3}\,xy.$$

Nous avons (n° **161**)

$$x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi, \quad y = y' \cos\varphi - x' \sin\varphi,$$

d'où

$$xy = \tfrac{1}{2}(y'^2 - x'^2)\sin 2\varphi + x'y' \cos 2\varphi.$$

Les termes de x', y' ont des périodes beaucoup plus longues que φ; de sorte que xy et, par conséquent, $\partial \mathfrak{M}_z$ ne dépendent que de termes dont la période diffère peu de la rotation de la Terre et dont l'influence est insensible. Comme ce que nous venons de dire s'applique à la Lune, on conclut que l'attraction du Soleil et de la Lune ne peut avoir aucune influence sur le mouvement de rotation de la Terre.

168. Précession annuelle et valeur de l'année équinoxiale. — La *précession annuelle* est la différence des valeurs de Ψ pour les valeurs $t+1$ et t du temps ou

$$50'',37140 - 0'',00017722\,t.$$

L'année sidérale est constante, égale en jours moyens à $365^j,256374$, et, pendant cette période, le Soleil décrit une circonférence. Le nombre de jours employés pour parcourir l'arc ci-dessus est, par suite, de

$$0^j,1425456 - 0^j,000000501435\,t,$$

et, en le retranchant de l'année sidérale, on trouve, pour la longueur de l'année équinoxiale,

$$365^j,113828 + 0^j,000000501435\,t;$$

elle augmente ainsi de $0^s,06$ environ par siècle.

169. Rapport des moments d'inertie principaux de la Terre. — En prenant pour unité l'année julienne, qui est de $365^j,25$, nous avons

$$n' = 360^\circ \times \frac{365,25}{365,256374},$$

$$\frac{n'}{n} = \frac{1}{365,256374},$$

$$\frac{n'^2}{n} = \frac{360^\circ \times 365,25}{(365,256374)^2} = 0^\circ,98559 = 3548'',2.$$

Comme, d'après Laplace, $\omega = 2,35333$, on déduit de la formule (16)

$$(\alpha) \qquad \frac{C - A'}{C} = 0,00328.$$

On a d'ailleurs, en négligeant le cube de cette fraction,

$$\frac{C - A'}{A'} = \frac{C - A'}{C}\,\frac{C}{A'} = \frac{C - A'}{C}\left(1 + \frac{C - A'}{C}\right) = 0,00329.$$

De la formule (p) du n° **103**, ou

$$\frac{C - A'}{C} = \left(E - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\int_0^1 \rho A^3\,dA}{\int_0^1 \rho A^4\,dA},$$

en ayant égard à la valeur précédente (α) et en se rappelant que le rapport φ de la force centrifuge à la pesanteur est égal à $\frac{1}{289}$, on déduit, pour l'aplatissement de la Terre,

$$E = 0{,}0017301 + 0{,}00328\,\frac{\int_0^1 \rho A^4\, dA}{\int_0^1 \rho A^2\, dA}.$$

Or, en appelant ρ' la densité à la surface, on a

$$5\int_0^1 \rho A^4\, dA = \rho' - \int_0^1 A^5 \frac{d\rho}{dA}\, dA,$$

$$3\int_0^1 \rho A^2\, dA = \rho' - \int_0^1 A^3 \frac{d\rho}{dA}\, dA;$$

d'où

$$5\int_0^1 \rho A^4\, dA - 3\int_0^1 \rho A^2\, dA = \int_0^1 A^3(1 - A^2)\frac{d\rho}{dA}\, dA < 0,$$

attendu que $A < 1$ et que, la densité allant en décroissant du centre à la surface, $\frac{d\rho}{dA}$ est négatif; on obtiendra donc une limite supérieure de E en remplaçant par $\frac{3}{5}$ le rapport des intégrales qui se trouvent dans son expression, soit

$$0{,}0036981 = \frac{1}{274}.$$

Nous avons vu d'ailleurs que

$$E > \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{578}.$$

Nous avons donc deux limites entre lesquelles se trouve compris l'aplatissement. La limite supérieure diffère peu de la valeur $\frac{1}{300}$ que l'on attribue généralement à l'aplatissement de la Terre.

170. Variations séculaires du jour solaire. — Soient (*fig.* 22) $u = \chi Q$ l'ascension droite du Soleil mesurée à partir de l'intersection χ de l'écliptique fixe avec l'équateur; $\Delta_1 = N\chi'$, $\varphi_1 = S\chi'$ les distances respectives du nœud descendant N et du Soleil à l'équinoxe du printemps χ'.

Les triangles rectangles $S\chi'Q$ et PNS donnent

$$\operatorname{tang}(u-\Delta)=\cos\Theta\operatorname{tang}\varphi_1,$$
$$\operatorname{tang}(\Lambda-\psi-\lambda)=\cos i\operatorname{tang}(\varphi_1+\Delta_1),$$

d'où, en développant et en négligeant les puissances de $\operatorname{tang}\Theta$ supérieures à la quatrième et celles de i supérieures à la seconde,

$$u=\Delta+\varphi_1-\operatorname{tang}^2\frac{\Theta}{2}\sin 2\varphi_1+\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4\frac{\Theta}{2}\sin 4\varphi_1,$$
$$\varphi_1=-\Delta_1+\Lambda-\psi-\lambda+\frac{i^2}{2}\sin 2(\Lambda-\psi-\lambda)\quad(^1),$$

et, en faisant abstraction des termes périodiques dépendant de la rotation annuelle apparente du Soleil autour de la Terre,

$$u=\Delta+\varphi_1,$$
$$\varphi_1=-\Delta_1+\Lambda-\psi-\lambda.$$

Le triangle $\chi N\chi'$ donne

$$\sin\Delta_1=-\frac{\sin\theta\sin(\psi+\lambda)}{\sin\Theta};$$

d'autre part, on déduit de la formule (13) du n° **165**, en y remplaçant $\cot\theta'$ par $\cot\Theta$ dans le terme en i^2,

$$\theta=\Theta+i\cos(\psi+\lambda)-\frac{i^2}{2}\sin^2(\psi+\lambda)\cot\Theta.$$

On a, par suite,

$$\sin\Delta_1=-\sin(\psi+\lambda)\left[1+i\cos(\psi+\lambda)\cot\Theta-\frac{i^2}{2}\cos^2(\psi+\lambda)-\frac{i^2}{2}\sin^2(\psi+\lambda)\cot^2\Theta\right]$$

et enfin

$$\Delta_1=-\left\{\psi+\lambda+\sin(\psi+\lambda)\left[i\cot\Theta-\frac{i^2}{2}\cos(\psi+\lambda)\right]\right\}.$$

---

(1) *Voir* le n° 22 de l'Introduction.

On déduit de là

$$\varphi_1 = \Lambda + \sin(\psi + \lambda)\left[i\cot\Theta - \frac{i^2}{2}\cos(\psi + \lambda)\right],$$

$$u = \Delta + \Lambda + \sin(\psi + \lambda)\left[i\cot\Theta - \frac{i^2}{2}\cos(\psi + \lambda)\right],$$

et, comme nous avons trouvé (n° **165**)

$$\Delta = -i\frac{\sin(\psi + \lambda)}{\sin\Theta},$$

il vient

$$u = \Lambda - i\sin(\psi + \lambda)\tang\frac{\Theta}{2} - \frac{i^2}{2}\sin(\psi + \lambda)\cos(\psi + \lambda).$$

En ayant égard à la première des formules (17) et à la seconde des formules (18), on forme facilement les valeurs suivantes :

$$i\sin(\psi + \lambda) = gt + (g'\zeta + k)t^2,$$

$$i^2\sin(\psi + \lambda)\cos(\psi + \lambda) = gg't^2,$$

$$\tang\frac{\Theta}{2} = \tang\frac{\theta'}{2} - \frac{g't}{2\cos^2\theta'};$$

on peut d'ailleurs prendre $\Lambda = n't$, en négligeant les termes périodiques. Il vient donc

$$u = n't - gt\tang\frac{\theta'}{2} - \left(g'\zeta + k - \frac{gg'}{2}\tang\frac{\theta'}{2}\right)\tang\frac{\theta'}{2}.$$

Si l'on désigne par S l'ascension droite du Soleil $(nt - u)$, mesurée à partir d'un méridien déterminé de la Terre, on a

$$\text{(19)} \qquad S = (n - n')t + g\tang\frac{\theta'}{2}t + \left(g'\zeta + k - \frac{gg'}{2}\tang\frac{\theta'}{2}\right)t^2.$$

Le *jour moyen* est l'intervalle pendant lequel cet angle augmentera de 360°. En négligeant le carré de cet intervalle que nous désignerons par x, et posant

$$H = \left(g'\zeta + k - \frac{gg'}{2}\tang\frac{\theta'}{2}\right)\tang\frac{\theta'}{2},$$

on trouve

$$x\left(n - n' + g\tang\frac{\theta'}{2} + 2tH\right) = 360°,$$

Supposons que l'on prenne pour unité de temps le jour moyen en 1850; on aura $x = 1$ pour $t = 0$; mais la valeur de g donnée plus haut, se rapportant à l'année julienne, devra être divisée par 365,25, ce qui rendra le terme $g \operatorname{tang} \frac{\theta'}{2}$ complètement négligeable. Nous aurons ainsi, pour 1850-51,

$$n = n' + 360^{\circ},$$

et, en prenant $n' = 0^{\circ},98561$, il vient

$$n = 360^{\circ},98561;$$

puis, pour le jour sidéral exprimé en fraction du jour moyen,

$$0^{j},988900.$$

Après avoir divisé les valeurs de g, g', ζ par 325,25, et celle de k par le carré de ce nombre, en vue de les rapporter à la nouvelle unité, on trouve

$$\Pi = -\frac{5'',2369}{(365,25)^2}.$$

On voit ainsi que la variation séculaire du jour moyen est pour ainsi dire insensible.

171. De l'influence des oscillations de la mer sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité. — Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la Terre était un corps solide; il nous reste à voir si les résultats auxquels nous sommes parvenu ne peuvent pas être modifiés d'une manière appréciable par les oscillations périodiques de la mer, dues aux attractions simultanées du Soleil et de la Lune.

Nous remarquerons en premier lieu que l'accélération d'entraînement de chaque molécule de la mer est la résultante de l'accélération due aux forces qui la sollicitent, de l'accélération centrifuge composée et de l'accélération relative oscillatoire prise en sens contraire. En d'autres termes, les équations du mouvement résultant d'une molécule de la mer sont les mêmes que si cette molécule faisait à chaque instant corps avec le noyau terrestre, en la supposant de plus sollicitée par la

force centrifuge composée et par la force d'inertie due au mouvement relatif oscillatoire.

Les termes dus à la force d'entraînement et aux attractions du Soleil et de la Lune peuvent être calculés, sans erreur appréciable, comme si la surface d'équilibre de la mer n'éprouvait aucune variation sous l'action de ces deux astres, et alors A, B, C, dont ils dépendent, représentent les trois moments principaux d'inertie du système invariable formé par le noyau terrestre et la mer à l'état d'équilibre, tel que nous venons de le concevoir.

Il nous reste à comprendre, dans les termes $\mathfrak{M}_\chi$, $\mathfrak{M}_\eta$ du n° **160**, les moments par $O\chi$, $O\eta$ de la force centrifuge composée et de la force d'inertie dans le mouvement relatif, calculés avec l'approximation que nous venons de définir, c'est-à-dire comme si la surface de la mer n'éprouvait aucune variation dans sa forme.

D'après le n° **132**, les composantes des forces précédentes suivant la méridienne et le parallèle sont, pour la molécule m,

$$(a) \qquad \begin{aligned} & m\left(2n\mu\frac{dv}{dt}-\frac{d^2u}{dt^2}\right), \\ & -m\left(2n\mu\frac{du}{dt}+\frac{d^2v}{dt^2}\right). \end{aligned}$$

La première se décompose en deux autres :

$$\mathrm{Z}=-m\left(2n\mu\frac{dv}{dt}-\frac{d^2u}{dt^2}\right)\sqrt{1-\mu^2}, \quad \text{suivant } Oz;$$

$$(b) \qquad m\left(2n\mu\frac{dv}{dt}-\frac{d^2u}{dt^2}\right)\mu, \quad \text{suivant la trace du méridien sur l'équateur.}$$

Des composantes (a) et (b), on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{X}= & \quad m\left(2n\mu\frac{du}{dt}+\frac{d^2v}{dt^2}\right)\sin(\varphi+\varpi) \\ & +m\left(2n\mu\frac{dv}{dt}-\frac{d^2u}{dt^2}\right)\cos(\varphi+\varpi) \quad \text{suivant } O\chi, \\ \mathrm{Y}= & -m\left(2n\mu\frac{du}{dt}+\frac{d^2v}{dt^2}\right)\cos(\varphi+\varpi) \\ & +m\left(2n\mu\frac{dv}{dt}-\frac{d^2u}{dt^2}\right)\sin(\varphi+\varpi) \quad \text{suivant } O\eta. \end{aligned}$$

Enfin les coordonnées de m parallèles aux axes $O\chi$, $O\eta$, Oz sont, en prenant pour unité, comme au n° **132**, le rayon moyen de la surface d'équilibre de la mer,

$$x = \sqrt{1-\mu^2}\cos(\varphi+\varpi),$$
$$y = \sqrt{1-\mu^2}\sin(\varphi+\varpi),$$
$$z = \mu,$$

et il vient, pour les moments par rapport aux mêmes axes,

$$O\chi \ldots\ldots \begin{cases} -m\left(2n\mu\dfrac{dv}{dt}-\dfrac{d^2u}{dt^2}\right)\sin(\varphi+\varpi) \\ +m\left(2n\mu\dfrac{du}{dt}+\dfrac{d^2v}{dt^2}\right)\mu\cos(\varphi+\varpi), \end{cases}$$

$$O\eta \ldots\ldots \begin{cases} m\left(2n\mu\dfrac{dv}{dt}-\dfrac{d^2u}{dt^2}\right)\cos(\varphi+\varpi) \\ +m\left(2n\mu\dfrac{du}{dt}+\dfrac{d^2v}{dt^2}\right)\mu\sin(\varphi+\varpi), \end{cases}$$

$$Oz \ldots\ldots -m\left(2n\mu\frac{du}{dt}+\frac{d^2v}{dt^2}\right)\sqrt{1-\mu^2}.$$

Pour obtenir les portions de $\mathfrak{M}_\chi$, $\mathfrak{M}_\eta$, $\mathfrak{M}_z$ qui se rapportent aux oscillations de la mer, il faut faire la somme de ces expressions pour toutes les molécules de la masse fluide. Or, en raison de leur petitesse, on peut calculer les déplacements, comme aux n^{os} **132** et suivants, c'est-à-dire en négligeant les déplacements de l'équateur terrestre; on peut de plus, comme on l'a fait aux numéros précités, supposer que ces déplacements ont la même valeur pour tous les points de la couche fluide situés sur un même rayon lors de l'équilibre, ce qui revient à prendre

$$m = -\rho\gamma\, d\mu\, d\varpi,$$

en nous rappelant que γ représente la profondeur de la mer.

On a ainsi

$$\mathfrak{M}_\chi = \int\left[\left(2n\mu\frac{dv}{dt}-\frac{d^2u}{dt^2}\right)\sin(\varphi+\varpi)-\left(2n\mu\frac{du}{dt}+\frac{d^2v}{dt^2}\right)\mu\cos(\varphi+\varpi)\right]\gamma\, d\mu\, d\varpi,$$

$$\mathfrak{M}_\eta = -\int\left[\left(2n\mu\frac{dv}{dt}-\frac{d^2u}{dt^2}\right)\cos(\varphi+\varpi)+\left(2n\mu\frac{du}{dt}+\frac{d^2v}{dt^2}\right)\mu\sin(\varphi+\varpi)\right]\gamma\, d\mu\, d\varpi,$$

$$\mathfrak{M}_z = \int\left(2n\mu\frac{du}{dt}+\frac{d^2v}{dt^2}\right)\sqrt{1-\mu^2}\,\gamma\, d\mu\, d\varpi.$$

Ces expressions, en raison de la petitesse de γ, sont elles-mêmes très petites par rapport à u et à v ou sont du même ordre de grandeur que la surélévation z de la mer. Concevons que l'on remplace u et v par leurs valeurs (6) du n° **144**, en remarquant que φ diffère très peu de nt. Les moments ci-dessus se composeront de termes périodiques dont la plus longue période correspondra à l'arc $(n - i)t$. Pour les oscillations de la première espèce, i étant très petit par rapport à n, la plus longue période sera d'un jour environ et n'aura ainsi aucune influence sur la précession et la nutation. Il en sera de même pour les oscillations de la troisième espèce, en observant que i diffère peu de $2n$.

Quant aux oscillations de la seconde espèce, $n - i$ ne dépendra que du mouvement annuel du Soleil autour de la Terre, et la plus longue période de $\mathfrak{M}_\chi$, $\mathfrak{M}_\eta$ sera d'une année environ et n'influera en rien sur le phénomène.

De la même manière, $\mathfrak{M}_z$ ne produira aucun changement appréciable sur la moyenne rotation de la Terre.

Les considérations précédentes étant applicables à l'atmosphère, on doit conclure que *les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation sont absolument les mêmes que si la mer et l'atmosphère formaient une masse solide avec le sphéroïde qu'elles recouvrent.*

Nous remarquerons enfin que les vents alizés (allant de l'Occident vers l'Orient, entre les tropiques), qui sont dus au mouvement que la chaleur solaire imprime à l'atmosphère, malgré leur action continuelle sur les montagnes qu'ils rencontrent, les tremblements de terre et en général tout ce qui peut agiter la Terre dans son intérieur ou à sa surface), n'ont également aucune influence sur le mouvement de notre globe, puisqu'ils ne modifient pas le moment résultant des quantités de mouvement par rapport au centre de la Terre.

§ II. — Du mouvement de la Lune autour de son centre de gravité.

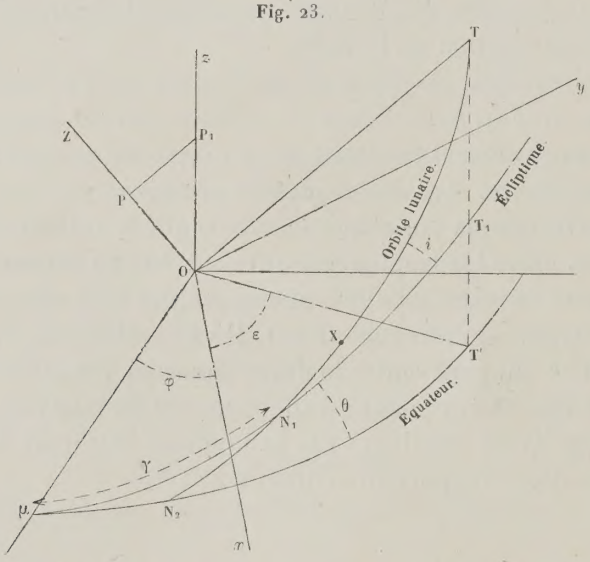
172. On sait que la Lune nous présente toujours la même face dans son mouvement de révolution autour de la Terre; il suit de là que sa vitesse angulaire autour de son axe et celle de son mouvement autour de la Terre ou sont égales entre elles, ou ne diffèrent l'une de l'autre

que de quantités très petites et périodiques. Si, comme tout porte à le croire, la Lune a été primitivement fluide, elle a dû s'allonger dans le sens de la Terre, de sorte que son plus grand axe principal d'inertie doit faire un petit angle avec le rayon vecteur qui joint le centre de la Terre à celui de la Lune, et c'est la seule hypothèse que nous ferons dans ce qui suit. Il doit paraître évident, d'ailleurs, et d'après tout ce qui précède, que le plus petit axe d'inertie de la Lune doit être l'axe fixe dans sa masse autour duquel elle tourne.

173. Formules relatives à la libration de la Lune. — Libration en longitude. — Nous ne changerons rien à l'état de la question en considérant le centre de la Lune comme fixe et supposant que la Terre décrit l'orbite lunaire autour de son centre.

Soient (*fig.* 23)

Fig. 23.



Ox, Oy les axes principaux d'inertie de la Lune passant par son centre de gravité et déterminant le plan de l'équateur;

Oz son troisième axe d'inertie;

T la position du centre de la Terre à un instant quelconque;

T′ sa projection sur l'équateur;

μ le nœud descendant de l'équateur sur l'écliptique;

N_1 celui de l'orbite lunaire;

OZ la normale à l'écliptique;

ε l'angle, supposé très petit, que forme OT′ avec l'axe principal Ox dirigé vers la Terre;

θ l'angle très petit compris sous les plans de l'équateur et de l'écliptique;

i l'angle constant, et très petit, déterminé par les plans de l'orbite lunaire et de l'écliptique;

n le mouvement moyen de rotation de la Lune autour de la Terre;

x, y, z les coordonnées de T;

A la distance moyenne de la Lune à la Terre, à laquelle nous supposerons égales la distance OT et, par suite, sa projection OT′;

γ la longitude du nœud descendant N_1 de l'orbite lunaire;

α la vitesse angulaire des nœuds de cette orbite sur l'écliptique;

p, q, r les composantes de la rotation instantanée de la Lune autour de son centre de gravité, suivant Ox, Oy, Oz, les deux premières étant très petites par rapport à la troisième.

Nous supposerons que μ et N_1 ont coïncidé avec le point X de l'écliptique à l'instant pris pour origine du temps, et nous négligerons les puissances θ, i, ε supérieures à la première.

Nous pourrons, vu la petitesse de i et θ, considérer TT′ comme se confondant avec l'arc de grand cercle perpendiculaire à l'équateur, qui rencontre l'écliptique en T_1.

Nous aurons ainsi

$$x = A\cos\varepsilon = A, \quad y = A\sin\varepsilon = A\varepsilon,$$

$$z = TT' = A(i\sin N_1T_1 + \theta\sin\mu T') = A[i\sin(\varphi + \varepsilon - \gamma) + \theta\sin(\varphi + \varepsilon)].$$

En négligeant la masse de la Lune devant celle m de la Terre (n° 8), nous aurons $m = n^2A^3$, et les formules (3) du n° 55 deviendront, eu égard au sens positif actuel des moments,

$$\mathfrak{M}_x = 3n^2(C - B)\varepsilon[i\sin(\varphi + \varepsilon - \gamma) + \theta\sin(\varphi + \varepsilon)],$$
$$\mathfrak{M}_y = 3n^2(A - C)\ [i\sin(\varphi + \varepsilon - \gamma) + \theta\sin(\varphi + \varepsilon)],$$
$$\mathfrak{M}_z = 3n^2(B - A)\varepsilon.$$

Le premier de ces moments, étant du second ordre, peut être négligé; le second $\mathfrak{M}_y$ peut s'exprimer d'une autre manière en remarquant que

$\varphi + \varepsilon$ est la latitude de la Terre mesurée à partir du nœud μ et qu'elle est de la forme

$$\varphi + \varepsilon = nt + \alpha t + c,$$

en désignant par c une constante arbitraire; il vient ainsi

$$(1) \qquad \mathfrak{M}_y = 3n^2(A - C)\left\{ i \sin[(n+\alpha)t + c - \gamma] + \theta \sin(\varphi + \varepsilon) \right\}.$$

En raison de la petitesse des rapports $\frac{pq}{r}$, $\frac{A-B}{C}$, leur produit peut être négligé, et celle des équations du mouvement de la Lune, autour de son centre de gravité, qui se rapporte à Oz, se réduit à

$$C\frac{dr}{dt} = \mathfrak{M}_z = 3n^2(B - A)\varepsilon.$$

Si l'on néglige le carré de θ ou que l'on suppose $\cos\theta = 1$, r n'a pour effet que de déplacer Ox dans le plan de l'équateur (n° **157**). Or la vitesse relative de Ox par rapport à OT′ dans le sens direct est $-\frac{d\varepsilon}{dt}$; la vitesse de OT′ est la dérivée par rapport au temps de la longitude de la Terre par rapport à la Lune, mesurée à partir de l'origine X censée fixe en raison de l'extrême lenteur des déplacements de l'écliptique. Cette longitude est de la forme (Chap. I et II)

$$nt + \Sigma H \sin(at + a'),$$

le signe Σ comprenant une somme de termes périodiques dont les uns dépendent uniquement des éléments du mouvement elliptique et les autres de leurs variations dues aux forces perturbatrices, dont la principale est l'attraction solaire.

Il vient donc

$$r = -\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d}{dt}[nt + \Sigma H \sin(at + a')],$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - \Sigma H a^2 \sin(at + a'),$$

et enfin, en ayant égard à l'équation écrite plus haut,

$$(2) \qquad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -3n^2\frac{B-A}{C}\varepsilon - \frac{1}{C}\Sigma H a^2 \sin(at + a').$$

Si l'on fait d'abord abstraction de l'excentricité de l'orbite ou des H,

l'intégrale de cette équation est, en désignant par K, k deux constantes arbitraires,

$$\varepsilon = \mathrm{K}\sin\left[n\sqrt{\frac{3(\mathrm{B}-\mathrm{A})}{\mathrm{C}}}\,t + k\right].$$

Pour que ε ne croisse pas avec le temps, il faut que B soit plus grand que A, ce qui est conforme à nos inductions premières sur la disposition des trois axes principaux d'inertie de la Lune. Les observations les plus précises n'indiquant aucune trace de ce mouvement oscillatoire, la constante K, dépendant de l'état initial du mouvement, ou était nulle à l'origine, ou son influence est depuis longtemps annulée par des causes étrangères. Si ces oscillations existaient, leur durée serait

$$\frac{2\pi}{n}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{3(\mathrm{B}-\mathrm{A})}} = 1 \text{ mois lunaire} \times \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{3(\mathrm{B}-\mathrm{A})}}.$$

En admettant, comme nous le verrons ci-après,

$$\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}} = 0,00564,$$

on trouve que cette durée serait de 24,31 mois lunaires.

Si l'on pose

$$\varepsilon = \mathrm{L}\sin(at + a'),$$

L étant une constante, on fera disparaître le terme en H du second membre de l'équation (2) en prenant

$$(a) \qquad \mathrm{L} = -\frac{\mathrm{H}a^2}{3n^2\dfrac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}} - a^2}.$$

La différence entre les déplacements angulaires dans la rotation et la révolution autour de la Terre sera, en laissant de côté les termes qui dépendent de l'état initial,

$$-\varepsilon + \Sigma\mathrm{H}\sin(at + a') = \Sigma\mathrm{H}\,\frac{3n^2\dfrac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}}{3n^2\dfrac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}} - a^2}\sin(at + a').$$

De tous les termes dont se compose $\Sigma\mathrm{H}\sin(at + a')$, il n'y a de sensibles que ceux qui dépendent de l'équation du centre et de l'équation annuelle due à l'action perturbatrice du Soleil.

Bouvard et Nicollet ont trouvé, par la comparaison de 174 observations de la libration de la Lune en longitude, que la libration due à l'équation annuelle a pour valeur

$$L = 4'49'',7,$$

et, comme

$$H = 666'',7, \quad a = n.0,0748,$$

l'équation (a) donne

$$\frac{B-A}{C} = 0,000564.$$

Mais ces observations n'offrent pas une garantie d'exactitude suffisante pour que la valeur numérique ci-dessus présente la même certitude que celle de $\frac{C-A}{B}$, que nous donnerons plus loin. La différence entre la rotation de la Lune et sa vitesse angulaire de révolution est

$$\begin{aligned} r - n &= -\frac{d\varepsilon}{dt} + \Sigma a H \cos(at + a') \\ &= -Kn\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}} \cos\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}(t+k) + \Sigma a(H-L)\cos(at+a'), \end{aligned}$$

et, comme elle est périodique, les deux mouvements moyens seront éternellement égaux. Il n'est pas nécessaire que ces mouvements aient été égaux à l'origine, il suffit que la rotation de la Lune ait été comprise entre

$$a - Kn\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}} \quad \text{et} \quad a + Kn\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}},$$

limites, à la vérité, assez restreintes, à cause de la petitesse de K, mais suffisantes pour faire disparaître l'invraisemblance d'une égalité parfaite des deux mouvements moyens à l'origine.

174. Du mouvement de l'équateur et de la variation de son inclinaison. — Les équations du mouvement rotatoire de la Lune, qui se rapportent aux axes Ox, Oy, sont, en y faisant $r = n$,

$$(3) \quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)nq = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)np = 3n^2(A-C)\left\{ i\sin[(n+\alpha)t + c - \gamma] + 0\sin(\varphi+\varepsilon)\right\}, \end{cases}$$

en se rappelant que $\partial\mathfrak{R}_x = 0$ et en ayant égard à la valeur (1).

Soient (*fig.* 23) P et P_1 les pôles de l'écliptique et de la Lune, supposés à l'unité de distance du centre O. L'arc de grand cercle PP_1 peut être considéré comme rectiligne, parallèle à l'équateur et perpendiculaire à $O\mu$: si l'on désigne par s, s' ses projections sur Ox, Oy, les dérivées $\frac{ds}{dt}$, $\frac{ds'}{dt}$ seront les composantes correspondantes de la vitesse du point P dans son mouvement relatif par rapport à la Lune. Or la vitesse d'entraînement de ce point, considéré comme invariablement lié à la Lune, a pour projections sur Ox, Oy

$$-ns'+q,\quad ns-p,$$

et, comme le déplacement de P ou de l'écliptique dans l'espace est extrêmement lent, on peut négliger la vitesse absolue de ce point devant ns, ns', p, q et écrire simplement

$$\frac{ds}{dt}=ns'-q,\quad \frac{ds'}{dt}=-ns+p,$$

d'où

$$(\alpha)\qquad p=\frac{ds'}{dt}+ns,\quad q=-\frac{ds}{dt}+ns',$$

ou, portant ces valeurs dans les équations (3), on obtient les suivantes :

$$(4)\qquad \frac{d^2s'}{dt^2}+n\left(1+\frac{B-C}{A}\right)\frac{ds}{dt}+n^2\frac{C-B}{A}s'=0,$$

$$(4')\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2s}{dt^2}-n\left(1+\dfrac{A-C}{B}\right)\dfrac{ds'}{dt}-n^2\dfrac{A-C}{B}s \\ \quad =-3n^2\dfrac{A-C}{B}\{i\sin[(n+\alpha)t+c-\gamma]+\theta\sin(\varphi+\varepsilon)\}. \end{cases}$$

Si nous remarquons que $PP_1=\theta$, nous avons

$$(5)\qquad s=-\theta\sin\varphi,\quad s'=-\theta\cos\varphi,$$

par suite

$$\theta\sin(\varphi+\varepsilon)=-s\cos\varepsilon-s'\sin\varepsilon=-s,$$

en ayant égard à la petitesse de ε.

L'équation (4') devient

$$(4'')\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 s}{dt^2} - n\left(1 + \dfrac{A-C}{B}\right)\dfrac{ds'}{dt} - 4n^2\dfrac{(A-C)}{B}s \\ \qquad = -3n^2\dfrac{A-C}{B}\,i\sin[(n+\alpha)t+c]. \end{cases}$$

En désignant par W, W' deux constantes, les équations (4) et (4'') seront satisfaites en posant

$$(6)\qquad \begin{cases} s = W\sin[(n+\alpha)t+c] \\ s' = W'\cos[(n+\alpha)t+c], \end{cases}$$

ces constantes étant déterminées par les relations

$$-(n+\alpha)^2 W' + n(n+\alpha)\left(1+\frac{B-C}{A}\right)W - n^2\frac{B-C}{A}W' = 0,$$

$$-(n+\alpha)^2 W + n(n+\alpha)\left(1+\frac{A-C}{B}\right)W' - 4n^2\frac{A-C}{B}W = -3n^2\frac{(A-C)i}{B}.$$

De la première on déduit, en négligeant α^2 et le produit de α par $\frac{C-B}{A}$,

$$W' = W\left(1-\frac{\alpha}{n}\right),$$

et de la seconde, par suite,

$$(7)\qquad W = \frac{3ni\dfrac{C-A}{B}}{3n\dfrac{C-A}{B} - 2n\alpha}.$$

Nous avons donc

$$\theta\sin\varphi = -W\sin[(n+\alpha)t+c],$$

$$\theta\cos\varphi = -W\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\cos[(n+\alpha)t+c],$$

d'où

$$(8)\qquad \theta = -W\left\{1-\frac{\alpha}{n}\cos^2[(n+\alpha)t+c]\right\},$$

$$(9)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\operatorname{tang}[(n+\alpha)t+c].$$

L'inclinaison θ de l'orbite lunaire sur l'écliptique n'éprouverait donc

qu'un très petit mouvement oscillatoire, dont la période serait très peu différente d'un mois lunaire et qui échappe à l'observation.

La formule (7) donne, en y faisant $W = -\theta$,

$$\frac{C-A}{B} = \frac{2}{3}\frac{\alpha}{n}\frac{\theta}{i+\theta}.$$

Les observations les plus précises ont donné

$$\frac{\alpha}{n} = 0{,}004019, \quad \theta = 1^\circ 28' 45'', \quad i = 5^\circ 8' 48'';$$

d'où

$$\frac{C-A}{B} = 0{,}000599814,$$

chiffre qui diffère très peu de celui (0,000599) qui a été obtenu par Laplace.

L'équation (9) donne, en négligeant le carré de α [1],

$$\varphi = (n+\alpha)t + c + \frac{\alpha}{2n}\sin 2[(n+\alpha)t + c];$$

en faisant abstraction du terme périodique dont la période est environ de deux mois lunaires, et qui ne peut pas être accusé par l'observation, on voit que : *la vitesse des nœuds de l'équateur par rapport au rayon vecteur mené au centre de la Terre est la même que celle des nœuds de l'orbite lunaire ; comme les deux lignes des nœuds coïncident actuellement, cette coïncidence se perpétuera éternellement.*

Quant à l'action du Soleil sur la Lune, dont nous n'avons pas tenu compte, elle peut être négligée devant celle de la Terre, car les coefficients qui entrent dans les expressions de $\partial\pi_\chi$, $\partial\pi_\eta$, $\partial\pi_z$ pour le Soleil et la Terre sont entre eux comme les carrés des vitesses angulaires de la Terre autour du Soleil et de la Lune autour de la Terre, et ce rapport n'est que $\frac{1}{179}$.

Les termes qui dépendent de l'état initial du mouvement s'obtiendront en intégrant les équations (3) en faisant abstraction du second membre de la seconde. Mais ces équations ne sont alors autre chose

---

(1) *Voir* le n° 22 de l'Introduction.

que celles que nous avons intégrées au n° 159 et leurs intégrales, en remarquant que l'on doit faire $r_0 = n$, sont

$$p = \mathrm{P}\ \sin(lt + \mathrm{I}),$$
$$q = \mathrm{P}j\cos(lt + \mathrm{I}),$$

en posant

$$l = n\sqrt{\frac{(\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{B})}{\mathrm{AB}}},\quad j = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}-\mathrm{B}}}$$

et en désignant par P et I deux constantes arbitraires.

Nous avons ainsi, en vertu des équations (α),

$$\frac{ds}{dt} - ns' = -\mathrm{P}j\cos(lt + \mathrm{I}),$$
$$\frac{ds'}{dt} + ns = \mathrm{P}\sin(lt + \mathrm{I});$$

d'où l'on déduit

$$s = \mathrm{P}j(lj + n)\sin(lt + \mathrm{I}) + \mathrm{P}'\sin(nt + \mathrm{I}'),$$
$$s' = \mathrm{P}\ (nj + l)\cos(lt + \mathrm{I}) + \mathrm{P}'\cos(nt + \mathrm{I}'),$$

en désignant par P′ et I′ deux nouvelles constantes arbitraires et remplaçant $\frac{\mathrm{P}}{j(n^2 - l^2)}$ simplement par P.

Pour avoir les valeurs complètes de s et s', il faudrait ajouter à ces expressions les intégrales particulières (6); mais, comme, d'après l'observation, φ est sensiblement égal à $(n + \alpha)t$, il s'ensuit que les arbitraires P et P′ sont très petites ou insensibles.

Ainsi se trouve vérifié, pour la Lune comme pour la Terre, le principe posé au n° 130 et qui doit naturellement s'étendre à tous les corps célestes.

§ III. — Du mouvement des anneaux de Saturne autour de leur centre de gravité.

175. Nous avons vu, en traitant de la figure des anneaux de Saturne (n^{os} **111** et **112**), que chacun d'eux est un solide dont le centre de figure coïncide à peu près avec celui de la planète, mais dont le centre de gravité doit se trouver en un point différent. Ce centre tournant autour de Saturne dans le même temps que l'anneau, l'anneau tourne

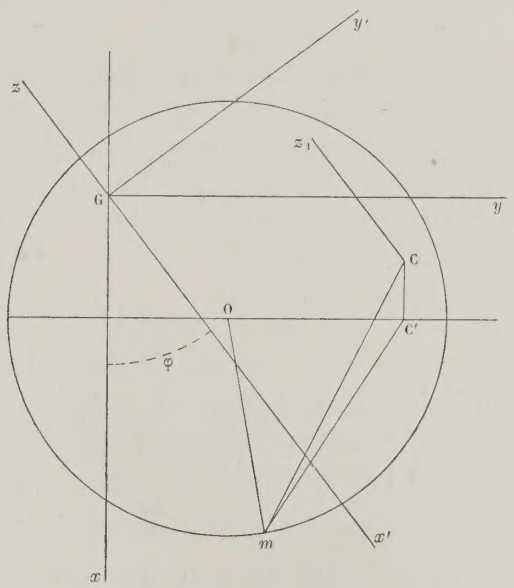
autour de son centre de gravité dans le même temps qu'autour de la planète.

Nous allons chercher à déterminer la cause en vertu de laquelle les anneaux se maintiennent constamment dans le même plan, malgré l'action des satellites et du Soleil, action qui doit produire sur eux des mouvements de précession différents de l'un à l'autre et qui ont, par suite, pour tendance de faire sortir les anneaux de leur plan.

Nous supposerons d'abord que l'anneau total se réduit à une circonférence matérielle dont le centre diffère très peu du centre de gravité de Saturne, et dont le plan fait un petit angle avec l'équateur de cette planète.

Soient (*fig.* 24)

Fig. 24.



O le centre de l'anneau ;

C celui de Saturne ;

C′ la projection de C sur le plan de l'anneau ;

G le centre de gravité de l'anneau ;

Gx la parallèle, menée en ce point, à la trace de l'équateur de Saturne sur le plan de l'anneau ;

Gy la perpendiculaire à cette droite dans le plan de l'anneau, laquelle perpendiculaire est parallèle à OC′;

Cz_1 l'axe de rotation de Saturne;

Gz la perpendiculaire en G au plan de l'anneau;

θ l'angle très petit formé par Gz et Gz_1 ou par les plans de l'anneau et de l'équateur de Saturne;

a, b, c les coordonnées de C parallèles à Gx, Gy, Gz;

α la distance OC′;

m la masse d'une molécule de l'anneau;

x, y, z ses coordonnées;

ι la distance Cm;

μ le cosinus de l'angle qu'elle forme avec Cz_1;

R le rayon de l'anneau, le rayon moyen de Saturne étant pris pour unité.

Nous prendrons également la masse de Saturne pour unité, et nous négligerons les termes du second ordre en θ, c et α.

Si, comme il est naturel de le supposer, on admet pour Saturne l'état de fluidité primitif et la forme d'équilibre correspondante, et si l'on a égard à la rotation dont il est animé, le potentiel de l'attraction qu'il exerce sur m sera (n° **104**)

$$V = \frac{1}{\iota} - \frac{\left(E - \frac{\varphi'}{2}\right)\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)}{\iota^3},$$

en désignant par E l'aplatissement et par φ' le rapport de la force centrifuge à la pesanteur relatif à l'équateur. Quand même on rejetterait notre hypothèse, on pourrait toujours, pour une valeur un peu grande de ι, admettre cette formule; car les coefficients de $\frac{1}{\iota^3}$ dans l'expression précédente et dans le développement général du potentiel du sphéroïde ne différeront (n^{os} **71** et suiv.) que de termes en $\sin 2\varpi$ et $\cos 2\varpi$ qui n'auront aucune influence sur le déplacement de l'anneau; en effet, ces termes ne donneront lieu, dans l'attraction sur l'anneau, qu'à d'autres termes dépendant de la rotation relativement très rapide de la planète sur elle-même, que l'intégration rendrait très petits; de plus, l'observation n'accuse aucun déplacement correspondant aux termes de cette nature.

Le cosinus de l'angle $z_1 Cm$, étant nul avec θ et c, est du même ordre de grandeur que ces quantités; il est donc permis d'en négliger le carré et de supposer $\rho = R$ dans les coefficients qui affectent sa première puissance. La composante de l'attraction de la planète sur m, estimée suivant Cm, se réduit ainsi à

$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{\left(E - \frac{\varphi'}{2}\right)}{\rho^4},$$

et, au degré d'approximation convenu, elle a elle-même pour composantes

$$-\frac{1}{\rho^2}\left(1 + \frac{E - \frac{\varphi'}{2}}{\rho^2}\right), \quad \text{suivant } C'm,$$

$$\frac{1}{R^2}\left(1 + \frac{E - \frac{\varphi'}{2}}{R^2}\right)\frac{c}{R}, \quad \text{suivant } Gz.$$

La composante de l'attraction de Saturne suivant la méridienne de cette planète, ou

$$-\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{dV}{d\mu} = \frac{2\mu\left(E - \frac{\varphi'}{2}\right)}{R^4},$$

donnera, en la changeant de signe, une composante égale suivant Gz_1 ou Gz, et une composante du second ordre ou négligeable parallèlement au plan de l'anneau. Il résulte de là que les composantes de l'attraction exercée par Saturne sur m suivant Gx, Gy, Gz sont, en tenant maintenant compte de la masse de cette molécule,

$$X = -\frac{m}{\rho^2}\left(1 + \frac{E - \frac{\varphi'}{2}}{\rho^2}\right)\frac{x-a}{\rho},$$

$$Y = -\frac{m}{\rho^2}\left(1 + \frac{E - \frac{\varphi'}{2}}{\rho^2}\right)\frac{y-b}{\rho},$$

$$Z = -\frac{2m\mu}{R^4}\left(E - \frac{\varphi'}{2}\right) + \frac{m}{R^2}\left(1 + \frac{E - \frac{\varphi'}{2}}{R^2}\right)\frac{c}{R}.$$

Il est inutile d'avoir égard au second terme de Z, qui donnerait, pour

toutes les molécules de l'anneau, une résultante passant par son centre de gravité, sans influence par suite sur le mouvement de rotation de l'anneau.

En égalant deux expressions de la projection de Cm sur Oz_1, on a

$$\mu_{z_1} = -c\cos\theta - (b-y)\sin\theta = -c-(b-y)\theta,$$

d'où

$$\mu = \frac{c+(b-y)\theta}{R},$$

et, en continuant à négliger dans Z les termes constants,

$$Z = \frac{2m}{R^5}\left(E - \frac{\varphi'}{2}\right)y\theta.$$

Nous avons ainsi, pour les moments par rapport à Ox et Oy de l'attraction de Saturne sur l'anneau,

$$\mathfrak{M}_x = \quad SZy = \quad \frac{2}{R^5}\left(E - \frac{\varphi'}{2}\right)\theta S m y^2,$$

$$\mathfrak{M}_y = -SZx = -\frac{2}{R^5}\left(E - \frac{\varphi'}{2}\right)\theta S m xy,$$

le symbole S se rapportant à la somme de toutes les masses élémentaires de l'anneau.

Soient maintenant

x', y' les coordonnées de m parallèles aux axes principaux Gx', Gy' de l'anneau menés par son centre de gravité;

A, B les moments d'inertie correspondants;

φ l'angle x'Gx.

On a

$$A = S m y'^2, \qquad B = S m x'^2,$$

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi,$$

$$S m y^2 = A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi,$$

$$S m xy = (B-A)\sin\varphi\cos\varphi;$$

par suite,

$$\mathfrak{M}_x = \quad \frac{2}{R^5}\left(E - \frac{\varphi'}{2}\right)(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\theta,$$

$$\mathfrak{M}_y = -\frac{2}{R^5}\left(E - \frac{\varphi'}{2}\right)(B-A)\theta\sin\varphi\cos\varphi.$$

Enfin, si l'on remarque que les moments de l'attraction de Saturne par rapport à Gx', Gy' ont pour expressions

$$\mathfrak{M}_{x'} = \mathfrak{M}_x \cos\varphi + \mathfrak{M}_y \sin\varphi, \quad \mathfrak{M}_{y'} = \mathfrak{M}_y \cos\varphi - \mathfrak{M}_x \sin\varphi,$$

on trouve

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_{x'} = \dfrac{E - \frac{\varphi'}{2}}{R^5} A\theta \cos\varphi, \\ \mathfrak{M}_{y'} = \dfrac{E - \frac{\varphi'}{2}}{R^5} B\theta \sin\varphi. \end{cases}$$

Le moment

$$\mathfrak{M}_z = S(Yx - Xy)$$

de l'attraction par rapport à Oz étant indépendant de l'orientation des axes Ox, Oy, supposons momentanément que ces axes coïncident avec Ox', Oy'; nous aurons

$$Smx = 0, \quad Smy = 0,$$
$$Smxy = 0, \quad Smy^2 = A, \quad Smx^2 = B.$$

Le triangle $C'Om$ donne

$$\iota = \sqrt{R^2 + \alpha^2 - 2a(b-y)} = R\left[1 + \frac{\alpha}{R^2}(y-b)\right],$$

d'où

$$\frac{1}{\iota^3} = \frac{1}{R^3}\left[1 - \frac{3\alpha}{R^2}(y-b)\right],$$
$$\frac{1}{\iota^5} = \frac{1}{R^5}\left[1 - \frac{5\alpha}{R^2}(y-b)\right];$$

par suite,

$$\mathfrak{M}_z = Sm\left(\frac{1}{\iota^3} + \frac{E - \frac{\varphi'}{2}}{\iota^5}\right)(bx - ay) = a\frac{A\alpha}{R^5}\left(3 + 5\frac{E - \frac{\varphi'}{2}}{R^2}\right)$$

Mais il est inutile d'avoir égard à ce moment; car, puisqu'il dépend de a ou qu'il est périodique comme le mouvement relatif de Saturne par rapport à G, il ne peut affecter la moyenne valeur de la rotation de l'anneau autour de Gz.

176. Considérons maintenant les valeurs des moments $\mathfrak{M}_{x'}$, $\mathfrak{M}_{y'}$, $\mathfrak{M}_z$ qui se rapportent à l'action sur l'anneau d'un astre L qui en est très éloigné, et auquel se rapporteront les coordonnées courantes.

Nous avons, en nous reportant au n° 55, remarquant que $C = A + B$ et r représentant la distance moyenne de L et de G,

$$\mathfrak{M}_{x'} = \frac{3L}{r^5} A y' z = \frac{3LA}{r^2} (y \cos\varphi - x \sin\varphi) z,$$

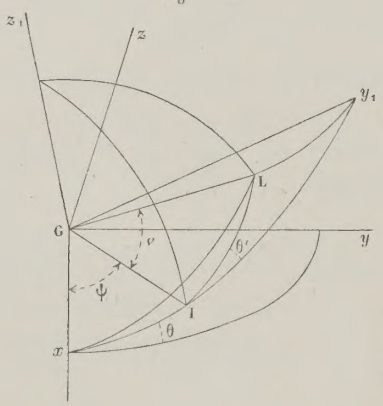
$$\mathfrak{M}_{y'} = -\frac{3L}{r^5} B x' z = -\frac{3LB}{r^3} (x \cos\varphi + y \sin\varphi) z,$$

$$\mathfrak{M}_z = \frac{3L}{r^5} (B - A) y' x' = \frac{3L}{r^3} (B - A) \left[xy \cos 2\varphi + \frac{y^2 - x^2}{2} \sin 2\varphi \right].$$

Dans le calcul de x, y, z, nous pourrons, sans erreur appréciable, supposer que G représente le centre de gravité de Saturne.

Soient (*fig.* 25)

Fig. 25.



Gx l'intersection de l'anneau et de l'équateur de Saturne;
GI celle de cet équateur avec l'orbite, censée fixe, de L;
ψ l'angle IGx;
θ' l'angle compris sous les plans de l'orbite et de l'équateur;
φ l'angle $\widehat{LGI}$;
Oy_1 la trace de l'équateur de Saturne sur le plan zOy.

Conservons d'ailleurs celles des autres notations qui ont été admises plus haut.

De la considération du triangle sphérique $Lx\mathrm{I}$ résulte

$$x = \rho\cos Lx = \rho(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta').$$

Du triangle sphérique $\mathrm{L}\mathrm{I}y_1$ on déduit, pour la projection y_1 de ρ sur Oy_1,

$$y_1 = \rho\cos Ly_1 = \rho(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta').$$

Enfin le triangle $Lz_1\mathrm{I}$ donne, pour la projection de ρ sur Oz_1,

$$z_1 = \rho\cos Lz_1 = \rho\sin\varphi\sin\theta'.$$

Nous avons donc, en continuant de négliger le carré de θ,

$$\begin{aligned} y &= \rho(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta') - \rho\sin\varphi\sin\theta'.\theta, \\ z &= \rho(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta')\theta + \rho\sin\varphi\sin\theta'. \end{aligned}$$

En substituant les valeurs x, y, z dans les expressions ci-dessus des moments, nous supprimerons les termes en sinus et cosinus de 2φ et des multiples de φ qui deviendraient insensibles par les intégrations. Nous aurons ainsi

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{x'} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mathrm{LA}}{\rho^3}\left[\sin\theta'\cos\theta'\cos(\varphi-\psi) + (\cos^2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta')\theta\cos\varphi - \dfrac{\theta}{2}\sin^2\theta'\cos(\varphi-2\psi)\right], \\ \mathfrak{M}_{y'} = -\dfrac{3\,\mathrm{LB}}{\rho^3}\left[\sin\theta'\cos\theta'\sin(\varphi-\psi) + (\cos^2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta')\theta\sin\varphi - \dfrac{\theta}{2}\sin^2\theta'\sin(\varphi-2\psi)\right]. \\ \mathfrak{M}_z = 0. \end{cases}$$

L'équation du mouvement de rotation qui se rapporte à Oz ou

$$\frac{dr}{dt} + \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}pq = 0$$

fait voir que la rotation r de l'anneau n'éprouve pas de variations appréciables en raison de la petitesse de p et q.

Nous obtiendrons les deux autres équations du mouvement en remplaçant respectivement, dans la première et la seconde des équations (A) du n° 157, $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$ par les sommes des valeurs de $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$ fournies par les formules (1) et (2). Nous poserons, de plus, comme au n° 174,

$$s = -\theta\sin\varphi, \quad s' = -\theta\cos\varphi,$$
$$p = \frac{ds'}{dt} + ns, \quad q = -\frac{ds}{dt} + ns'$$

et, de plus,

$$\lambda^2 = r^2 + \frac{2\left(\mathrm{E} - \frac{\varphi'}{2}\right)}{\mathrm{R}^5} + \frac{3\mathrm{L}}{\rho^5}(\cos^2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta'), \tag{3}$$

et nous remarquerons que $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$.

Nous obtiendrons ainsi

$$\frac{d^2s'}{dt^2} + \lambda^2 s' = \frac{3\mathrm{L}}{2\rho^3}\left[\sin\theta'\cos\theta'\cos(\varphi - \psi) - \frac{\theta}{2}\sin^2\theta'\cos(\varphi - 2\psi)\right],$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \lambda^2 s = \frac{3\mathrm{L}}{2\rho^3}\left[\sin\theta'\cos\theta'\sin(\varphi - \psi) - \frac{\theta}{2}\sin^2\theta'\cos(\varphi - 2\psi)\right]$$

ou, en négligeant les termes en θ,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2s'}{dt^2} + \lambda^2 s' = \dfrac{3\mathrm{L}}{2\rho^3}\sin\theta'\cos\theta'\cos(\varphi - \psi), \\ \dfrac{d^2s}{dt^2} + \lambda^2 s = \dfrac{3\mathrm{L}}{2\rho^3}\sin\theta'\cos\theta'\sin(\varphi - \psi). \end{cases} \tag{4}$$

Si l'on néglige seulement le carré de θ, on a

$$d\varphi - d\psi = r\,dt \quad \text{ou} \quad \varphi - \psi = rt + \text{const.};$$

il suit de là que les équations précédentes ont pour intégrales

$$s = \mathrm{K}\sin(\lambda t + k) + \frac{3\mathrm{L}}{2\rho^3}\frac{\sin\theta'\cos\theta'}{\lambda^2 - r^2}\sin(\varphi - \psi),$$

$$s' = \mathrm{K}'\cos(\lambda t + k') + \frac{3\mathrm{L}}{2\rho^3}\frac{\sin\theta'\cos\theta'}{\lambda^2 - r^2}\cos(\varphi - \psi),$$

en désignant par K, K', k, k' des constantes arbitraires.

Pour que $\theta = \sqrt{s^2 + s'^2}$ reste constamment très petit, il faut que K, K' et

$$\frac{3\mathrm{L}\sin\theta'\cos\theta'}{\lambda^2 - r^2} = \frac{\frac{3\mathrm{L}}{2\rho^3}\sin\theta'\cos\theta'}{\frac{2\left(\mathrm{E} - \frac{\varphi'}{2}\right)}{\mathrm{R}^5} + \frac{3\mathrm{L}}{2\rho^3}\left(\cos^2\theta' - \frac{\sin^2\theta'}{2}\right)} \tag{5}$$

aient de très petites valeurs.

Si Saturne était parfaitement sphérique, on devrait supprimer le

terme $E - \frac{\varphi'}{2}$ du dénominateur de l'expression (5), qui, se réduisant à

$$\frac{\sin\theta'\cos\theta'}{\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\sin^2\theta'},$$

aurait une valeur sensible.

Supposons que L soit le Soleil; soient r_1 la distance du centre de Saturne à son dernier satellite; T, T_1 les durées respectives de leurs révolutions sidérales; on a, en continuant à prendre la masse de Saturne pour unité,

$$\frac{L}{r^3} = \frac{1}{r_1^3}\left(\frac{T_1}{T}\right)^2.$$

Les observations donnent, en prenant le demi-diamètre de Saturne pour unité,

$$T = 10759^j,08, \quad T_1 = 79^j,3296;$$
$$r_1 = 59,154, \qquad \theta' = 29°,7.$$

On s'éloigne peu de la vérité en prenant $R = 2$, et l'on trouve, pour la valeur de l'expression (5),

$$\frac{0,001543}{E - \frac{\varphi'}{2} + \frac{39824}{10^{13}}}.$$

Pour que cette quantité soit très petite, il faut que

$$E - \frac{\varphi'}{2}$$

ait une valeur sensible, et, s'il en est ainsi, l'anneau et par suite les divers anneaux de Saturne seront maintenus dans un même plan sous l'action de la planète. Telle est la cause de ce phénomène qui a conduit Laplace à déterminer le mouvement de rotation de Saturne bien avant que l'observation des taches de cette planète l'ait fait découvrir.

La coïncidence des anneaux dans un même plan ne sera pas modifiée par le cinquième satellite de Saturne qui donne un terme analogue à celui du Soleil, ni par les autres satellites de la planète qui se meuvent à peu près dans ce même plan.

Nous empruntons à la *Mécanique céleste* les considérations suivantes, qui termineront ce Chapitre :

« Un anneau pouvant être considéré comme une réunion de satellites, on conçoit que l'action de Saturne, qui maintient ses divers anneaux dans le plan de son équateur, doit, par la même raison, maintenir dans le même plan les orbites de ses satellites situés primitivement dans ce plan. Réciproquement, si les divers satellites d'une planète se meuvent dans un même plan fort incliné sur celui de son orbite, on peut en conclure qu'ils y sont maintenus par l'action de son équateur et qu'ainsi cette planète a un mouvement de rotation à peu près perpendiculaire au plan des orbites de ces satellites. On peut donc affirmer que la planète Uranus, dont les satellites se meuvent dans un plan presque perpendiculaire à l'écliptique, tourne elle-même autour d'un axe très peu incliné sur l'écliptique.

» Les termes de l'expression de θ qui dépendent de l'action du Soleil et du dernier satellite de Saturne étant insensibles et les dimensions de l'anneau n'entrant point dans les autres termes, il est clair que, si plusieurs anneaux sont attachés ensemble et se meuvent à peu près dans le plan de l'équateur de Saturne, l'action du Soleil et du dernier satellite ne les en écartera pas sensiblement. Ainsi le résultat obtenu pour un anneau, en faisant abstraction de sa largeur, a également lieu pour un anneau d'une largeur quelconque. La seule partie de θ qui puisse être sensible dépendant de constantes arbitraires, et étant indépendante de la position de l'équateur de Saturne, relativement à son orbite et à celle de son dernier satellite, il en résulte que cet équateur, dans le mouvement très lent que l'action du Soleil et de ce satellite lui imprime, emporte avec lui les plans de ces anneaux et des orbites des satellites situés primitivement dans ce plan. C'est ainsi que nous avons vu que le plan de l'écliptique, dans son mouvement séculaire, entraîne les plans de l'équateur et de l'orbite lunaire, de manière à rendre constante l'inclinaison mutuelle de ces trois plans et la coïncidence de leurs intersections. »

CHAPITRE IX.

DE LA CHALEUR TERRESTRE.

177. Rappel de quelques-uns des résultats auxquels conduit la théorie du mouvement varié de la chaleur dans une sphère homogène (1). — Nous supposerons que, à une certaine époque prise pour origine du temps, la répartition de la température dans la sphère a eu lieu suivant une loi donnée, et que celle du milieu ambiant dépend de la position des points de la surface du volume.

Soient

a le rayon de la sphère;
r, θ, ϖ les coordonnées polaires de l'un de ses points m;
V la température en ce point au bout du temps t.

Cette température se compose de deux parties, l'une qui dépend uniquement de la température du milieu dans lequel la sphère se trouve placée, l'autre qui en est indépendante et qui ne résulte que de la manière dont la chaleur a été primitivement distribuée dans la sphère. Cette seconde partie est la même que si la sphère était placée dans un milieu dont la température est constante; et comme c'est la seule qui nous intéresse, c'est son excès sur la constante que V représentera dans ce qui suit, et que nous appellerons simplement la température de m.

Si le temps t était suffisamment grand, la sphère serait arrivée à l'état d'équilibre de température; mais, avant d'atteindre cet état final, elle a dû passer par un dernier état de mouvement de la chaleur, le seul dont nous ayons à nous occuper.

(1) *Voir* notamment notre Ouvrage intitulé *Physique mathématique*

En supposant que le rayon de la sphère soit très grand, on a

$$V = G\frac{a}{r}\sin\pi\frac{r}{a}\left(1-\frac{\mu}{a}\right)e^{-ht} \quad (1), \tag{1}$$

formule dans laquelle G représente une constante qui dépend de la répartition initiale de la chaleur dans la sphère; μ une constante qui dépend de la nature de la sphère et de celle du milieu; h une troisième constante de la forme $h = \left[K\frac{\pi}{a}\left(1-\frac{\mu}{a}\right)\right]^2$, K étant ce que l'on appelle le *coefficient de conductibilité intérieure* de la matière dont la sphère est formée.

178. De la chaleur centrale de la Terre. — L'augmentation de température observée à mesure que l'on pénètre dans l'intérieur de l'écorce terrestre, et qui est de 1° pour 33^m de profondeur, semble indiquer que notre globe n'est pas arrivé à son état final de température. On est ainsi conduit à admettre que la chaleur propre de la Terre est arrivée à son dernier état de mouvement.

Quoique la densité des couches dont la Terre est formée aille en augmentant de la surface au centre, nous supposerons qu'elles ont toutes le même pouvoir émissif et la même capacité calorifique, c'est-à-dire que la constante K ne varie pas d'une couche à l'autre. Nous pourrons alors faire ici l'application de la formule (1). Nous choisirons pour origine du temps l'époque actuelle, en considérant t comme négatif ou positif selon qu'il s'agira de temps passé ou à venir, et de plus le siècle pour unité de temps.

Nous avons trouvé, par la comparaison de la formule (1) avec les résultats de l'observation de la température à la surface de la Terre et dans les profondeurs que l'on a pu atteindre jusqu'ici,

$$\left\{\begin{array}{l} \mu = 5,796, \\ G\pi\dfrac{\mu}{a} = 0,1754, \\ h = \dfrac{11445}{10^{13}}. \end{array}\right. \tag{2}$$

(1) Formule (30) de la page 153 de l'Ouvrage mentionné dans la Note précédente, où n a été remplacé par μ.

En se rappelant que $a = 6366198^{m}$, on déduit de la seconde de ces formules

$$G = 61323,5. \tag{2'}$$

179. Diminution de la durée du jour due au refroidissement de la Terre. — Soient, à l'origine du temps,

n la vitesse angulaire de la Terre autour de son axe;
r la distance du centre de la Terre à un point déterminé de sa masse;
ρ la densité en ce point.

Nous admettrons que le coefficient de dilatation cubique a la même valeur i pour toutes couches sphériques dont la Terre est censée composée, et nous pourrons le regarder comme étant sensiblement constant pour les faibles variations de température que nous avons à considérer.

Si nous désignons par $d\mathrm{M}$ la masse de la couche limitée par les rayons r et $r + dr$, le moment de rotation de la Terre aura pour expression

$$\frac{n}{3} \int r^2 \, d\mathrm{M}$$

et doit rester constant lorsque la température subit, avec le temps, la variation $\delta\mathrm{V}$ que nous supposerons assez petite, de même que les variations correspondantes δn, δr de n et r, pour que l'on puisse en négliger le carré.

On a ainsi

$$\delta n \int r^2 \, d\mathrm{M} + 2n \int r \, d\mathrm{M} \, \delta r = 0$$

ou, en remarquant que $d\mathrm{M} = 4\pi\rho r^2 \, dr$,

$$\frac{\delta n}{n} = - \frac{2 \int_0^a \rho r^3 \, dr \, \delta r}{\int_0^a \rho r^4 \, dr}. \tag{3}$$

La condition relative à la variation du volume de $d\mathrm{M}$ avec la température donne

$$\delta (r^2 \, dr) = i r^2 \, dr \, \delta\mathrm{V}$$

ou, en remarquant que le premier membre de cette égalité équivaut à $d(r^2\,\delta r)$,

$$r^2\,\delta r = i\int_0^r \delta V.r^2\,dr.$$

Il vient, par suite,

$$\frac{\delta n}{n} = -\frac{2i\int_0^a \rho r\,dr\int_0^r \delta V.r^2\,dr}{\int_0^a \rho r^4\,dr}. \tag{4}$$

Si nous admettons l'hypothèse de E. Roche sur la progression de la densité des couches à mesure que l'on s'approche du centre, nous devrons remplacer A, dans la formule (16) du n° **107**, par $\frac{r}{a}$, puisque nous ne prenons plus ici le rayon de la Terre pour unité. En posant

$$\frac{r}{a} = x,$$

nous aurons

$$\rho = \rho_0(1-\beta x^2)$$

et

$$\frac{\delta n}{n} = -\frac{70i}{7-5\beta}\left(\int_0^1 x\,dx\int_0^x \delta V.x^2\,dx - \beta\int_0^1 x^3\,dx\int_0^x \delta V.x^2\,dx\right). \tag{5}$$

Mais, en intégrant par parties, on a

$$\int x\,dx\int \delta V.x^2\,dx = \frac{x^2}{2}\int \delta V.x^2\,dx - \tfrac{1}{2}\int \delta V.x^4\,dx,$$

$$\int x^3\,dx\int \delta V.x^2\,dx = \frac{x^4}{4}\int \delta V.x^2\,dx - \tfrac{1}{4}\int \delta V.x^6\,dx;$$

par suite,

$$\frac{\delta n}{n} = -\frac{35i}{7-5\beta}\left[\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\int_0^1 \delta V^2.x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \delta V.x^4\,dx + \frac{\beta}{2}\int_0^1 \delta V.x^5\,dx\right]. \tag{6}$$

Si l'on remarque que $\frac{\mu}{a}$ et h sont de très petites quantités, la formule (1) donne pour des valeurs de t qui ne dépassent pas certaines limites

$$V = \frac{G}{x}\sin\pi x e^{-ht} = \frac{G}{x}\sin\pi x.(1-ht)$$

et

$$\delta V = -\frac{G h t}{x} \sin \pi x.$$

La formule (6) devient ainsi

$$(7) \quad \frac{\delta n}{n} = \frac{35 G h i t}{7 - 5\beta}\left[\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\int_0^1 x \sin \pi x \, dx - \int_0^1 x^3 \sin \pi x \, dx + \frac{\beta}{2}\int_0^1 x^5 \sin \pi x \, dx\right].$$

Comme on a eu, en général,

$$\int_0^1 x^m \sin \pi x \, dx = \frac{1}{\pi}\left[1 - \frac{m(m-1)}{\pi^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{\pi^4} - \dots\right],$$

l'équation (7) se réduit à la suivante :

$$(8) \quad \frac{\delta n}{n} = \frac{35 G h i t}{7 - 5\beta}\left[0,31831\left(1 - \frac{\beta}{2}\right) - 0,12480 + 0,01134\beta\right].$$

Nous admettrons, comme au n° 106, que $\beta = 0,8$ et nous aurons alors

$$\frac{\delta n}{n} = 0,08780 . G h i t,$$

et, en substituant dans cette expression les données (2) et (2′) du numéro précédent, on trouve

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{66265}{10^{10}} i t.$$

Tout le monde est d'accord sur ce point que le granite forme la partie essentielle de l'écorce terrestre; d'après les quelques expériences qui ont été faites sur cette matière, son coefficient moyen de dilatation linéaire serait de 0,00085, sans qu'il y ait d'écart sensible de part et d'autre de cette moyenne.

Le coefficient de dilatation cubique du granite serait, par suite, de 0,00255. Mais, comme la matière pâteuse qui forme la partie essentielle du noyau terrestre doit avoir un coefficient de dilatation supérieur, comme cela arrive pour les liquides, nous pourrons sans exagération prendre

$$i = 0,005.$$

Nous aurons ainsi, en chiffre rond, ce qui est suffisant dans cet aperçu,

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{33\,t}{10^9}.$$

Ainsi, au bout de dix siècles ou pour $t = 10$, on aurait

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{33}{10^8},$$

et le jour moyen ne varierait ainsi que de $0^s,03$, ce qui est insensible.

CHAPITRE X.

DE LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE.

180. Désignons par O le centre de la Terre, m_1 un point de sa surface où se trouve un observateur qui se propose de déterminer la position d'un astre A.

Un pinceau lumineux partant de A (*fig.* 26), et que l'on peut considérer comme se réduisant à un simple rayon, viendra frapper l'œil de l'observateur. Ce rayon sera en ligne droite tant qu'il se trouvera en dehors de l'atmosphère; mais, en deçà de cette limite, il s'infléchira de plus en plus, en raison de la densité rapidement croissante des couches atmosphériques, ou, si l'on veut, les particules lumineuses du rayon décriront dans l'atmosphère une trajectoire comprise dans le plan passant par A et la verticale Om_1z, convexe par rapport à cette verticale.

Il résulte de là que l'observateur n'appréciera que la position d'un point A′ du ciel déterminé par la tangente en m_1 à la trajectoire, et dont la distance zénithale sera moindre que la distance semblable relative à A, qu'il a en vue d'obtenir. Il y a donc lieu d'établir une relation entre ces deux distances, de manière à déduire la seconde de la première.

Les variations irrégulières de température dans l'atmosphère, dues à des causes diverses, paraissent produire sur la réfraction des effets compensateurs.

Nous considérerons donc l'atmosphère comme étant en équilibre, et nous négligerons la faible ellipticité des couches qui la composent.

Soient

$m''m$, mm' deux éléments consécutifs de la trajectoire, le premier étant le plus rapproché de la Terre;

$m\mathrm{T}'$ le prolongement de $m'm$;

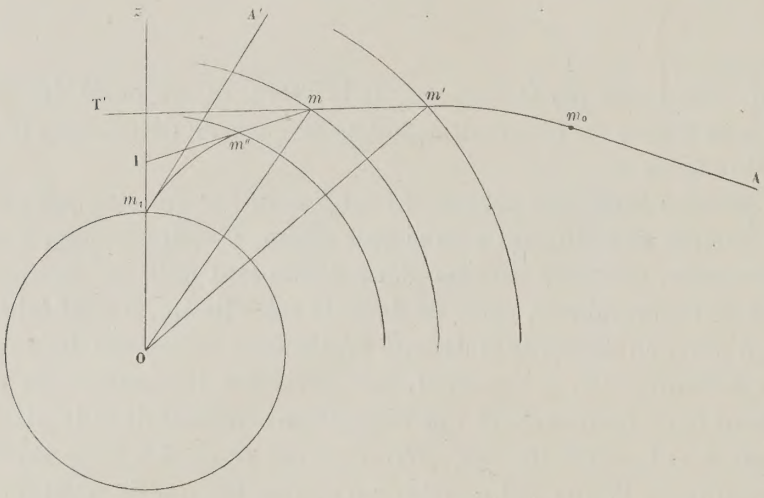
$\theta = \widehat{zOm}$, $d\theta = \widehat{mOm'}$, $r = Om$;

$\gamma, \gamma + d\gamma$ les angles de réfraction $m''mO$, $mm'O$;

$l, l + dl$ les indices de réfraction, par rapport au vide, des couches qui passent respectivement par m, m'' et m, m';

m_0 le point de la trajectoire qui se trouve sur la couche qui limite l'atmosphère.

Fig. 26.



Les quantités qui se rapportent à m_0, m_1 seront respectivement affectées des indices 0 et 1.

Nous avons, d'après une loi connue,

$$\frac{\sin\widehat{T'mO}}{\sin\gamma} = \frac{l}{l+dl} = 1 - \frac{dl}{l}.$$

Mais on a

$$\widehat{T'mO} = \gamma + d\gamma + d\theta,$$

par suite

$$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}(d\gamma + d\theta) = -\frac{dl}{l}.$$

En remarquant que

$$\operatorname{tang}\gamma = r\frac{d\theta}{dr},$$

il vient

$$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma+\frac{dr}{r}=-\frac{dl}{l};$$

d'où, en intégrant

$$rl\sin\gamma=\text{const.}=r_1 l_1\sin\gamma_1. \tag{1}$$

Soient I l'intersection de la direction de mm'' avec Oz; ζ l'angle de contingence $T'mI$; nous avons

$$\widehat{mIz}=\gamma+\theta,\quad r\frac{d\theta}{dr}=\tang\gamma,$$

$$d\zeta=d\widehat{mIz}=d\gamma+d\theta=d\gamma+\frac{dr}{r}\tang\gamma=\frac{dr\sin\gamma}{r\cos\gamma}. \tag{2}$$

Des formules (1) et (2), on déduit la suivante :

$$d\zeta=-\frac{r_1 l_1\sin\gamma_1\,dl}{rl\sqrt{l^2-\dfrac{r_1^2 l_1^2\sin^2\gamma_1}{r^2}}}. \tag{3}$$

En désignant par ρ, ρ_1 les densités de l'atmosphère en m et m_1, et par P une constante qui a reçu le nom de *pouvoir réfringent*, on a, d'après Biot,

$$l=\sqrt{1+P\rho},\quad l_1=\sqrt{1+P\rho_1}=1{,}000294\,12, \tag{4}$$

et comme pour le point m_0 on a $\rho_0=0$, par suite $l_0=1$, on voit que l ne varie que dans des limites très rapprochées l'une de l'autre et que $P\rho_1$ est la très petite quantité 0,000 588 33.

Quoi qu'il en soit, l'équation (5) devient

$$d\zeta=-\frac{r_1 P\sqrt{1+P\rho_1}\sin\gamma_1\,d\rho}{2r(1+P\rho)\sqrt{1+P\rho-\dfrac{r_1^2}{r^2}(1+P\rho_1)\sin^2\gamma_1}}. \tag{5}$$

En supposant que r soit exprimé en fonction de ρ, l'intégrale de cette équation entre les limites ρ_1 et 0 fera connaître l'angle ζ formé par m_0A avec m_1A' ou, vu le grand éloignement de A, l'angle qu'il faut ajouter à la distance zénithale observée pour avoir la distance zénithale vraie.

Mais, avant d'aller plus loin, il convient, au point de vue des applications, de simplifier la même équation en opérant par approximation.

Si nous posons

$$(6)\qquad \frac{r_1}{r} = 1 - s, \quad \alpha = \frac{P\rho_1}{2(1+P\rho_1)},$$

nous avons d'abord, en négligeant les termes du second ordre en $P\rho_1$, $P\rho$,

$$\frac{1+P\rho}{1+P\rho_1} = 1 + P\rho_1\left(\frac{\rho}{\rho_1} - 1\right) = 1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)$$

et l'équation (5) devient

$$(7)\quad d\zeta = -\frac{(1-s)\,\alpha \sin\gamma_1\, d\frac{\rho}{\rho_1}}{\left[1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)\right]\sqrt{\cos^2\gamma_1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right) + (2s - s^2)\sin^2\gamma_1}}.$$

181. Supposons que l'astre observé soit assez éloigné de l'horizon pour que $\cos\gamma_1$ n'ait pas une valeur trop petite. La variable s restant très petite, en raison de la faible hauteur de l'atmosphère rapportée au rayon terrestre, nous négligerons les termes du troisième ordre en s et α.

L'équation (7) devient alors

$$d\zeta = -\frac{\alpha}{\rho_1}\operatorname{tang}\gamma_1\left[1 - \frac{s}{\cos^2\gamma_1} + \alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)\frac{2\cos^2\gamma_1 + 1}{\cos^2\gamma_1}\right]d\rho;$$

d'où, en intégrant entre les limites ρ_1 et o de ρ,

$$(8)\qquad \zeta = \alpha\operatorname{tang}\gamma_1\left(1 + \frac{\alpha}{2}\frac{2\cos^2\gamma_1 + 1}{\cos^2\gamma_1} + \frac{1}{\cos^2\gamma_1}\int_{\rho_1}^{0}\frac{s\,d\rho}{\rho_1}\right).$$

Si nous intégrons par parties en remarquant que $s = 0$ pour $\rho = \rho_1$, nous avons

$$\int_{\rho_1}^{0}\frac{s\,d\rho}{\rho_1} = \int_{0}^{\rho_1}\frac{\rho}{\rho_1}\,ds.$$

En faisant abstraction des variations de température dans l'atmosphère, nous aurons, en appliquant la formule (1) du n° **150**,

$$\rho = \rho_1 e^{-r_1\frac{s}{l}},$$

l étant la hauteur d'une colonne d'air ayant ρ_1 pour densité, do t le poids représente la pression atmosphérique.

L'intégrale précédente devient

$$-\frac{l}{r_1}\left(1-e^{-r_1\frac{s_0}{l}}\right)=-\frac{l}{r_1},$$

en remarquant que la densité $\rho_0=\rho_1 e^{-\frac{r_1 s_0}{l}}$ doit être considérée comme nulle. On reconnaît facilement que l'équation (8) prend alors la forme suivante :

$$\zeta=\alpha\left(1+\frac{3}{2}\alpha-\frac{l}{r_1}\right)\operatorname{tang}\gamma_1+\alpha\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{l}{r_1}\right)\operatorname{tang}^3\gamma_1 \tag{9}$$

ou, en exprimant ζ en secondes,

$$\zeta=\frac{\alpha}{\text{arc }1''}\left(1+\frac{3}{2}\alpha-\frac{l}{r_1}\right)\operatorname{tang}\gamma_1+\frac{\alpha}{\text{arc }1''}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{l}{r_1}\right)\operatorname{tang}^3\gamma_1. \tag{9'}$$

Admettons que l'air se trouve à la température zéro et sous la pression correspondant à une colonne de mercure de $0^m,760$. Le rapport de la densité du mercure à celle de l'air étant 10473,04, nous avons

$$\frac{l}{0,760}=10473,04,$$

d'où

$$l=7960^m.$$

Mais Laplace a reconnu, en discutant un grand nombre d'observations relatives à la hauteur des montagnes, qu'il convenait de prendre

$$l=7974^m.$$

Nous avons d'ailleurs

$$r_1=6366198^m,$$

d'où

$$\frac{l}{r_1}=0,001252553.$$

Delambre, en comparant entre elles un grand nombre d'observations circompolaires, a été conduit à prendre

$$\alpha=0,00029376,$$

pour la valeur de ce que l'on appelle la *constante de la réfraction*.

La formule (9′) devient ainsi

$$\zeta = 60'',56706 \operatorname{tang}\gamma_1 - 0'',067018 \operatorname{tang}^3\gamma_1. \tag{10}$$

182. Cette formule représente très bien les réfractions lorsque γ_1 ne dépasse pas 79°; mais au delà elle se trouve de plus en plus en défaut et n'a plus de sens à l'horizon ou pour $\gamma_1 = 90°$.

Aussi Laplace lui en a substitué une autre, que nous allons faire connaître pour le cas où l'astre se trouve à l'horizon ou dans le voisinage de l'horizon.

Nous négligerons dans la formule (7) s devant l'unité, $2s\cos^2\gamma_1$ devant $\cos^2\gamma_1$, et nous remplacerons le facteur $1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)$ par la moyenne $1 - \alpha$ de ses valeurs extrêmes 1 et $1 - 2\alpha$. Nous obtiendrons ainsi

$$d\zeta = -\frac{\alpha \sin\gamma_1 \frac{d\rho}{\rho_1}}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2\gamma_1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right) + 2s}}.$$

Posons maintenant

$$s - \alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right) = u, \quad \rho = \rho_1\left(1 + f\frac{u}{f'}\right)e^{-\frac{u}{f'}}, \tag{11}$$

en désignant par u une variable que l'on substitue à s, et f, f' deux constantes que l'on déterminera en comparant les résultats du calcul à ceux de l'observation.

L'équation précédente devient

$$d\zeta = \frac{\alpha \sin\gamma_1}{f'(1-\alpha)} \frac{\left(1 - f + \frac{fu}{f'}\right)e^{-\frac{u}{f'}} du}{\sqrt{\cos^2\gamma_1 + 2u}}$$

ou

$$d\zeta = \frac{\alpha \sin\gamma_1}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{f'}}\, e^{\frac{\cos^2\gamma_1}{2f'}}\left(1 - f - \frac{f}{2f'}\cos^2\gamma_1 + ft^2\right)e^{-t^2} dt,$$

en posant encore

$$u = f't^2 - \frac{\cos^2\gamma_1}{2}.$$

Les limites inférieures s et u étant zéro, celle de t est

$$t_1 = \frac{\cos\gamma_1}{\sqrt{2f'}}.$$

Pour que ρ devienne nul à la limite de l'atmosphère, il faut que, à cette limite, u, par suite t, soit infini. Nous avons, par suite,

$$(12) \qquad \zeta = \frac{\alpha\sin\gamma_1}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{f'}}\left(1-\frac{f}{2}-ft_1^2\right)e^{t_1^2}\int_{t_1}^{\infty} e^{-t^2}dt \,(^1) + \frac{\alpha f\sin 2\gamma_1}{4(1-\alpha)f'}.$$

Dans le cas de la réfraction horizontale, on a $\gamma_1 = 90^\circ$, $t_1 = 0$, et simplement

$$(13) \qquad \zeta = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(1-\frac{f}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2f'}}.$$

---

(1) Pour obtenir cette intégrale par approximation, nous remarquerons que l'on a

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}de^{-t^2} = -\frac{e^{-t^2}}{2t} - \frac{1}{2}\int\frac{e^{-t^2}}{t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t} + \frac{1}{2^2}\int\frac{1}{t^3}de^{-t^2}\ldots$$

$$= -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{(2t^2)^3} - \ldots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2t^2)^n}\right] \mp \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}}\int\frac{e^{-t^2}dt}{t^{2n+2}};$$

d'où

$$(a) \qquad \int_{t_1}^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{e^{-t_1^2}}{2t_1}\left[1 - \frac{1}{(2t_1)^2} + \frac{1.3}{(2t_1^2)^3} - \ldots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2t_1^2)^n}\right] \mp \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}}\int_{t_1}^{\infty}\frac{e^{-t^2}dt}{t^{2n+2}}.$$

La plus grande valeur de e^{-t^2} entre les limites $t = t_1$, $t = \infty$ étant $e^{-t_1^2}$, on a

$$\int_{t_1}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{t^{2n+2}} < e^{-t_1^2}\int_{t_1}^{\infty}\frac{dt}{t^{2n+2}} = e^{-t_1^2}\frac{1}{(2n+1)t_1^{2n+1}};$$

par suite,

$$\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}}\int_{t_1}^{\infty}\frac{e^{-t^2}dt}{t^{2n+2}} < e^{-t_1^2}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}t_1^{2n+1}};$$

c'est-à-dire que le terme complémentaire de la suite (a), qui est de signe contraire au dernier terme de cette suite, lui est inférieur en valeur absolue. On voit donc que, t_1 étant donné, on pourra calculer la valeur de l'intégrale dont il s'agit avec telle approximation que l'on voudra, en prenant n suffisamment grand.

On devra d'ailleurs se rappeler que

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Soient g la gravité à la surface de la Terre; p la pression en un point de l'atmosphère dont le rayon vecteur est r. Nous avons, au degré d'approximation convenu,

$$dp = -g\frac{r_1^2}{r^2}\rho\,dr = -g\rho r_1\,ds,$$

et (n° **150**)

$$p_1 = g\rho_1 l,$$

d'où, en ayant égard aux formules (11),

$$\frac{dp}{p_1} = -\frac{r_1}{l}\frac{\rho}{\rho_1}\,ds = -\frac{r_1\rho}{l\rho_1}\,du + \frac{\alpha r_1}{l\rho_1^2}\rho\,d\rho = -\frac{r_1}{l}\left(1+\frac{f}{f_1}u\right)e^{-\frac{u}{f'}}\,du + \frac{\alpha r_1}{l\rho_1^2}\rho\,d\rho;$$

on déduit de là, en exprimant que l'on a $p = 0$, $\rho = 0$, pour $u = \infty$,

$$\frac{p}{p_1} = \frac{r_1 f'}{l}\left(1+\frac{f}{f'}u\right)e^{-\frac{u}{f'}} + ff'\frac{r_1}{l}e^{-\frac{u}{f'}} + \frac{\alpha}{2}\frac{r_1}{l}\frac{\rho^2}{\rho_1^2};$$

mais à la surface de la Terre nous avons $u = 0$, $p = p_1$, $\rho = \rho_1$; par suite,

$$f'(1+f) = \frac{l}{r_1} - \frac{\alpha}{2}. \tag{14}$$

En portant la valeur de f déduite de cette relation dans l'équation (13), on trouve

$$8\zeta^2(1-\alpha)^2 f'^3 - \alpha^2\pi\left(3f' - \frac{l}{r_0} + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0. \tag{15}$$

Si l'on prend avec Laplace

$$\begin{aligned}\zeta &= 0{,}01021018,\\ \alpha &= 0{,}00029387^6,\\ r_1 &= 6366198^{m},\\ l &= 7974^{m};\end{aligned}$$

on trouve que l'équation (15) a trois racines positives qui ont pour valeurs respectives

$$\begin{aligned}f' &= 0{,}000741816, \quad \text{d'où} \quad f = 0{,}490390,\\ f' &= 0{,}001906448\,3, \quad \text{d'où} \quad f = -0{,}420077,\\ f' &= 0{,}000281350, \quad \text{d'où} \quad f = 2{,}929670.\end{aligned}$$

Le second système de valeurs de f, f' n'est pas admissible, car il conduirait à

$$\frac{\rho}{\rho_1} = (1 - 220,341\,u)e^{524,520\,u},$$

et ρ serait nul pour $u = 0,0045384\overline{24}$, ou pour $s = u + \alpha = 0,004832\overline{3}$ et $sr_1 = 30763^{m}$, ce que l'on ne peut admettre.

Le troisième système de valeurs de f, f' doit aussi être rejeté, car l'équation (13) donnerait pour ζ une valeur négative.

Il ne nous reste donc à considérer que le premier système au moyen duquel et des données précédentes l'équation (12) devient

$$(16) \qquad \zeta = 2790,157(0,7547916\,t_1^2)\sin\gamma_1 \frac{2e^{t_1^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{\infty} e^{-t^2}dt + 1002\,1'',343\sin 2\gamma_1$$

avec

$$(17) \qquad t_1 = 25,961924\cos\gamma_1.$$

Les formules (10) et (16) sont d'accord à $0'',005$ pour $\gamma_1 = 60^{\circ}$; c'est donc à partir de cette limite qu'il convient de substituer la seconde à la première.

CHAPITRE XI.

INÉGALITÉS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES DUES A L'ELLIPTICITÉ DU SOLEIL.

183. Nous prendrons pour unité la masse M du Soleil; en nous reportant à la formule (9) du n° **103**, nous remplacerons a par la distance r, au centre de gravité O de cet astre, d'une planète dont la masse m sera censée concentrée en son centre de gravité; de plus, nous supprimerons l'indice 1 du rayon moyen A_1 de la surface; enfin nous poserons

$$k = E - \frac{\varphi}{2} \quad (1). \tag{1}$$

Nous aurons ainsi

$$V = \frac{1}{r} + \frac{kA^2}{r^3}\left(\frac{1}{3} - \mu^2\right). \tag{2}$$

Le premier terme de cette valeur est le potentiel de l'attraction du Soleil, considéré comme point matériel, sur la planète m, attraction qui donne lieu au mouvement elliptique de cette planète. Le second terme

$$R = \frac{kA^2}{r^3}\left(\frac{1}{3} - \mu^2\right), \tag{3}$$

(1) Nous rappellerons que E représente l'aplatissement du Soleil, φ le rapport à l'équateur de la force centrifuge solaire à la pesanteur, μ le cosinus de l'angle θ que forme Om avec l'axe de rotation Oz du Soleil.

dû à l'ellipticité du Soleil, doit être considéré comme une fonction perturbatrice.

Soient

ON l'intersection du plan de l'orbite actuelle avec celui de $x\mathrm{O}y$ de l'équateur solaire ;

γ l'angle formé par ces deux plans, dont nous ne conserverons que la seconde puissance ;

OI l'origine des longitudes elliptiques ;

ψ la longitude du nœud N mesurée à partir de $\mathrm{O}x$;

v celle de la planète.

Un triangle sphérique rectangle donnant

$$\cos\theta = \sin\gamma \sin(v - \psi),$$

l'expression (3) devient

$$\mathrm{R} = \frac{k_{\mathrm{A}}^2}{r^3}\left[\tfrac{1}{3} - \gamma^2 \sin^2(v - \psi)\right]. \tag{4}$$

Nous avons dans le mouvement elliptique, en négligeant le cube de l'excentricité e, en nous reportant à la formule (28′) du n° **15**,

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos(nt + \varepsilon - \omega) - \frac{e^2}{2}\left[\cos 2(nt + \varepsilon - \omega) - 1\right],$$

d'où

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-3} = 1 + 3e\cos(nt + \varepsilon - \omega) + \tfrac{3}{2}e^2\left[3\cos 2(nt + \varepsilon - \omega) + 1\right].$$

Il suit de là que l'on a, en négligeant $e\gamma^2$ et remplaçant v par $nt + \varepsilon$ (n° **15**),

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{R} = \frac{k_{\mathrm{A}}^2}{a^3}\Big\{ &\tfrac{1}{3} + e\cos(nt + \varepsilon - \omega) + \frac{3e^2}{2}\left[3\cos 2(nt + \varepsilon - \omega) + 1\right] \\ &- \frac{\gamma^2}{2}\left[1 - \cos 2(nt + \varepsilon - \psi)\right]\Big\}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

d'où

$$
(6)\quad
\begin{cases}
\dfrac{d\mathrm{R}}{da} = -3k\dfrac{\mathrm{A}^2}{a^4}\left\{\dfrac{1}{3} + e\cos(nt+\varepsilon-\omega) + \dfrac{e^2}{2}[3\cos 2(nt+\varepsilon-\omega)+1] - \dfrac{\gamma^2}{2}[1-\cos 2(nt+\varepsilon-\psi)]\right\},\\
\dfrac{d\mathrm{R}}{de} = k\dfrac{\mathrm{A}^2}{a^3}\left\{\cos(nt+\varepsilon-\omega) + e[3\cos 2(nt+\varepsilon-\omega)+1]\right\},\\
\dfrac{d\mathrm{R}}{d\omega} = k\dfrac{\mathrm{A}^2}{a^3}e[\sin(nt+\varepsilon-\omega) + 3e\sin 2(nt+\varepsilon-\omega)],\\
\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} = -k\dfrac{\mathrm{A}^2}{a^3}[e\sin(nt+\varepsilon-\omega) + 3e^2\sin 2(nt+\varepsilon-\omega) + \gamma^2\sin 2(nt+\varepsilon-\psi)],\\
\dfrac{d\mathrm{R}}{d\gamma} = -k\dfrac{\mathrm{A}^2}{a^3}\gamma[1-\cos 2(nt+\varepsilon-\psi)].
\end{cases}
$$

Comme nous n'avons en vue que de déterminer les inégalités séculaires de l'orbite, nous ferons abstraction des termes périodiques dans ces expressions, qui se réduisent, par suite, aux suivantes :

$$
(6')\quad
\begin{cases}
\dfrac{d\mathrm{R}}{da} = -3k\dfrac{\mathrm{A}^2}{a^4}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{\gamma^2}{2}\right),\\
\dfrac{d\mathrm{R}}{de} = k\dfrac{\mathrm{A}^2}{a^3}e,\\
\dfrac{d\mathrm{R}}{d\omega} = 0,\\
\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} = 0,\\
\dfrac{d\mathrm{R}}{d\gamma} = -k\dfrac{\mathrm{A}^2}{a^3}\gamma
\end{cases}
$$

Si nous nous reportons aux formules (13) du n° 33, en y remplaçant φ par γ et remarquant que $\dfrac{d\mathrm{R}}{d\alpha} = 0$, nous voyons d'abord que a, e, γ n'éprouveront pas d'inégalités séculaires. Nous aurons ensuite, au degré d'approximation convenu,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= -nk\frac{\mathrm{A}^2}{a^2}\left(1-\frac{e^2}{2}\right),\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -nk\frac{\mathrm{A}^2}{a^2}\left(2-\frac{e}{2}+e^2-3\gamma^2\right),\\
\frac{d\alpha}{dt} &= -nk\frac{\mathrm{A}^2}{a^2}\left(1+\frac{e^2}{2}\right),
\end{aligned}
$$

d'où

$$(7)\qquad \begin{cases} \delta\omega = -nk\dfrac{A^2}{a^2}\left(1-\dfrac{e^2}{2}\right)t, \\ \delta\varepsilon = -nk\dfrac{A^2}{a^2}\left(2-\dfrac{e}{2}+e^2-3\gamma^2\right)t, \\ \delta\alpha = -nk\dfrac{A^2}{a^2}\left(1+\dfrac{e^2}{2}\right)t. \end{cases}$$

184. Application à Mercure. — Les inégalités précédentes seront d'autant plus sensibles que la planète sera plus rapprochée du Soleil; si donc elles peuvent acquérir une valeur appréciable, c'est surtout dans le mouvement elliptique de Saturne.

Nous avons vu (n° **102**) que la plus grande valeur que puisse atteindre E est $\frac{5}{4}\varphi$ et correspond au cas où le Soleil serait homogène; d'où il suit que k est au plus égal à $\frac{3}{4}\varphi$. Nous admettrons cette valeur pour obtenir des limites supérieures des inégalités dont il s'agit. Si ν désigne la vitesse angulaire de rotation du Soleil, nous aurons

$$\varphi = \frac{A\nu^2}{\frac{M}{A^2}} = \frac{A^3\nu^2}{M}.$$

En désignant par a' le demi-grand axe de l'orbite terrestre et par n' la vitesse angulaire moyenne de la Terre dans son mouvement autour du Soleil, nous avons (n° 3)

$$M = a'^3 n'^2;$$

par suite,

$$\varphi = \frac{A^3}{a'^3}\frac{\nu^2}{n'^2}$$

et

$$k = \frac{3}{4}\frac{A^3}{a'^3}\frac{\nu^2}{n'^2}.$$

La durée de la rotation du Soleil étant de $25^j,417$ et celle de la révolution sidérale de la Terre de $365^j,256$, on a

$$\frac{\nu}{n'} = \frac{365,256}{25,417}.$$

Le demi-diamètre du Soleil observé dans sa moyenne distance à la

Terre est $16'2'',15$, ce qui donne

$$\frac{A}{a'} = \sin 16'2'',15.$$

On déduit de ces données

$$\log k = \bar{5},1937971.$$

On a d'ailleurs, pour Mercure et en prenant l'année sidérale pour unité de temps,

$$\frac{A}{a} = \frac{A}{a'}\frac{a'}{a} = \sin 16'2'',15 \times \frac{100000}{0,3870987},$$
$$n = \frac{360^\circ \times 365^j,256374}{87^j,969258}.$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$nk\frac{A^2}{a^2} = 0'',012192.$$

On a d'ailleurs

$$e = 0,2056048.$$

Il résulte de ce qui précède que les équations (7) deviennent

$$(7') \qquad \begin{cases} \delta\omega = -0'',011934\,t, \\ \delta\varepsilon = -0'',012192(1,9394259 - 2\gamma_1^2)\,t, \\ \delta\alpha = -0'',012450\,t. \end{cases}$$

On voit ainsi que les mouvements du périhélie et du nœud ne s'élèveraient guère qu'à une seconde par siècle; l'inégalité de l'époque serait inférieure au double de ces dernières variations. Ces trois inégalités sont donc insensibles, d'autant plus que nous avons exagéré leurs valeurs en admettant que le Soleil est homogène. On peut donc négliger l'effet de l'ellipticité du Soleil sur le mouvement de Mercure et à plus forte raison sur les mouvements des autres planètes, qui sont toutes plus éloignées du Soleil.

CHAPITRE XII.

INTRODUCTION A LA THÉORIE DE LA LUNE.

185. La Lune doit être l'objet d'une théorie spéciale en raison de la grandeur et du grand nombre de ses inégalités et du peu de convergence des séries qui les donnent. Il nous paraît inutile de faire ressortir les difficultés que présente la question (1), difficultés dont on se rendra suffisamment compte en suivant l'analyse que nous allons développer.

Soient

M, m, m' les masses de la Terre, de la Lune et du Soleil;
O le centre de la Terre pris pour origine des coordonnées;
x, y, z les coordonnées de la Lune;
r, v, θ son rayon vecteur, sa longitude dans le plan xOy mesurée à partir de Ox et sa latitude par rapport à ce plan;

$$u = \frac{1}{r\cos\theta}, \quad s = \operatorname{tang}\theta.$$

Nous adopterons, pour le Soleil, les mêmes notations que pour la Lune, en ne les distinguant de ces dernières que par un accent.

Nous prendrons pour unité de masse la somme $M + m$.

Nous ferons usage dans ce qui suit des équations du n° 15 de l'Intro-

(1) Les principaux géomètres et astronomes qui se sont successivement occupés de ce sujet sont Clairault, Laplace, Poisson, Plana, de Pontécoulant et Delaunay.

Nous avons cru devoir adopter la méthode de Laplace, dont les formules n'ont pas cessé de recevoir leur application en Astronomie.

duction, savoir

$$(1)\quad \begin{cases} dt = \dfrac{d\varphi}{u^2\sqrt{h^2 + 2\displaystyle\int \frac{dQ}{d\varphi}\frac{d\varphi}{u^2}}}, \\ \dfrac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \dfrac{\frac{1}{u^2}\dfrac{dQ}{d\varphi} - \dfrac{dQ}{du} - \dfrac{s}{u}\dfrac{dQ}{ds}}{h^2 + 2\displaystyle\int \frac{dQ}{d\varphi}\frac{d\varphi}{u^2}} = 0, \\ \dfrac{d^2s}{d\varphi^2} + s + \dfrac{\dfrac{dQ}{d\varphi}\dfrac{ds}{d\varphi} - (1+s^2)\dfrac{dQ}{ds} - us\dfrac{dQ}{du}}{u^2\left(h^2 + 2\displaystyle\int \frac{dQ}{d\varphi}\frac{d\varphi}{u^2}\right)} = 0. \end{cases}$$

Nous supposerons d'abord les corps sphériques.

En ajoutant le potentiel $\frac{1}{\rho}$ de l'attraction de la Terre sur la Lune et à la fonction perturbatrice R (n° 37) due à l'attraction du Soleil, nous aurons

$$Q = \frac{1}{r} + \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)}} - \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3}.$$

Si nous remarquons que

$$\begin{aligned} &[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= [r + r'^2 - 2xx' - 2yy' - zz']^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{r'}\left[1 - \frac{2\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r^2}{2}\right)}{r'^2}\right]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

le développement de cette expression, suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{r'}$, sera

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'^3}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{3}{2}\frac{1}{r'^5}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r^2}{2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{5}{2}\frac{1}{r'^7}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{r^2}{2}\right)^3 + \ldots, \end{aligned}$$

d'où

$$Q = \frac{1}{r} + m'\left[\frac{1}{r'} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r'^3} + \frac{3}{2}\frac{1}{r'^5}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{1}{r^2}\right)^2 + \frac{3}{2}\frac{1}{r'^7}\left(xx' + yy' + zz' - \frac{1}{r^2}\right)^3 + \dots\right].$$

Mais on a

$$r = \frac{1}{u\cos\theta} = \frac{\sqrt{1+s^2}}{u},$$

$$x = r\cos\theta\cos v = \frac{\cos v}{u}, \quad y = r\cos\theta\sin v = \frac{\sin v}{u}, \quad z = r\sin\theta = \frac{s}{u},$$

et en substituant ces valeurs, ainsi que celles que l'on en déduit pour r', x', y', z', dans l'expression de Q, on trouve

$$Q = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{m'u'}{\sqrt{1+s'^2}}\left\{1 + \frac{3}{2}\frac{[uu'\cos(v-v') + uu'ss' - \frac{1}{2}u'^2(1+s^2)]^2}{(1+s'^2)^2u^4} + \frac{5}{2}\frac{[uu'\cos(v-v') + uu'ss' - \frac{1}{2}u'^2(1+s^2)]^3}{(1+s^2)^3u^6} + \dots - \frac{(1+s^2)u'^2}{2(1+s'^2)u^2}\right\}.$$

Comme le rapport des distances moyennes de la Lune et du Soleil à la Terre est seulement 0,002589, soit $\frac{1}{386}$, on pourra négliger les termes de l'ordre u'^5. D'autre part, quoique le plan de l'écliptique vraie ne soit pas fixe, comme il entraîne avec lui l'orbite lunaire, l'inclinaison de cette orbite sur le plan reste constante (1). Nous pouvons donc

---

(1) On peut s'assurer, comme il suit, de l'exactitude de cette assertion.

Supposons que le plan fixe xOy soit celui de l'écliptique correspondant à une époque déterminée, et soient α la longitude du nœud de l'écliptique à l'époque t sur le plan ci-dessus et φ' l'inclinaison de cette écliptique. Nous avons (n° 16)

$$s' = \operatorname{tang}\varphi'\sin(v'-\alpha) = \operatorname{tang}\varphi'\cos\alpha\sin v' - \operatorname{tang}\varphi'\sin\alpha\cos v';$$

mais nous savons que (n° 46)

$$p = \operatorname{tang}\varphi'\sin\alpha = \Sigma N\sin(it+l), \quad q = \operatorname{tang}\varphi'\cos\alpha = \Sigma N\cos(it+l),$$

formules dans lesquelles les i sont des quantités déterminées qui dépendent de l'attraction des planètes sur la Terre et les N et l des constantes qui dépendent de la position des orbites à une époque donnée.

Nous aurons ainsi, en remplaçant i par $-i$ et l par $-l$,

$$(a) \qquad s' = \Sigma N\sin(v' + it + l).$$

Soient ϑ_1 la latitude de la Lune au-dessus de l'écliptique vraie et λ sa latitude par rapport

prendre le plan de l'écliptique vraie pour plan de x, y et supposer, par suite, $s' = 0$.

Nous aurons de cette manière, en négligeant les quantités des ordres $m'u'^3 s^4$ et $m'u'^5$,

$$(2)\quad \begin{cases} Q = \dfrac{u}{\sqrt{1+s^2}} + m'u' + \dfrac{m'u'^3}{4u^2}\left[1 + 3\cos 2(v - v') - 2s^2\right] \\ \qquad + \dfrac{m'u'^4}{8u^3}\left[3(1 - 4s^2)\cos(v - v') + 5\cos 3(v - v')\right]; \end{cases}$$

à xOy, en admettant qu'elle se trouve sur l'écliptique vraie. Nous aurons

$$s = \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}(\lambda + \theta_1) = \frac{\operatorname{tang}\lambda + \operatorname{tang}\theta_1}{1 - \operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang}\theta_1}$$

ou simplement

$$s = \operatorname{tang}\lambda + s_1,$$

en posant $s_1 = \operatorname{tang}\theta_1$ et remarquant que λ et θ_1 sont de petits angles.

Mais, en vertu de la formule (a), nous avons

$$\operatorname{tang}\lambda = \Sigma N \sin(v + it + l);$$

d'où

$$(b)\qquad s = \Sigma N \sin(v + it + l) + s_1.$$

On formera facilement l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{ds}{dv}\frac{dQ}{dv} - us\frac{dQ}{du} - (1+s^2)\frac{dQ}{ds} \\ &\quad = \frac{3m'u'^3}{u^2}\left[\cos(v - v') - \frac{1}{2}\frac{u'}{u} + \frac{5}{2}\frac{u'}{u}\cos^2(v - v') + \dots\right] \\ &\qquad \times \left[s\cos(v - v') - \sin(v - v')\frac{ds}{dv} - s'\right], \end{aligned}$$

qui devient, en ayant égard aux valeurs (a) et (b),

$$\frac{3m'u'^3}{u^2}\left[\cos(v - v') - \frac{1}{2}\frac{u'}{u} + \frac{5}{2}\frac{u'}{u}\cos^2(v - v') + \dots\right]\left[s_1\cos(v - v') - \sin(v - v')\frac{ds_1}{dv}\right].$$

La troisième des équations (1) donne, par suite,

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s + \frac{\frac{3}{2}m'u'^3 s_1 + \dots}{u^4\left(h^2 + 2\int\frac{dQ}{dv}\frac{dv}{u^2}\right)} = 0$$

ou

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s + \frac{3}{2}\frac{m'u'^3 s_1}{h^2 u^4} + \dots = 0.$$

Si l'on néglige les excentricités et les inclinaisons des orbites, on a $u = \frac{1}{a}$, $u' = \frac{1}{a'}$,

d'où, en négligeant aussi les quantités de l'ordre de $m'u'^4 s^3$,

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dQ}{du} + \dfrac{s}{u}\dfrac{dQ}{ds} = \dfrac{1}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{m'u'}{2u^3}[1+3\cos 2(v-v')], \\ \qquad\qquad - \dfrac{3m'u'^4}{8u^4}[(3-4s^2)\cos(v-v') + 5\cos 3(v-v')], \\ \dfrac{dQ}{dv} = -\dfrac{3m'u'^3}{2u^2}\sin 2(v-v') - \dfrac{m'u'^4}{8u^3}[3(1-4s^2)\sin(v-v') + 15\sin 3(v-v')] \\ \dfrac{dQ}{ds} = -\dfrac{us}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{m'u'^3 s}{u^2} - \dfrac{3m'u'^4 s}{u^3}\cos(v-v'). \end{cases}$$

Avant de chercher à intégrer les équations (1), nous remarquerons que, abstraction faite de l'action du Soleil ou supposant $m'=0$, et en ayant égard aux valeurs (3), elles se réduiraient aux suivantes, qui ne sont autre chose que celles du mouvement elliptique mises sous une forme particulière :

$$(4)\qquad dt = \frac{dv}{hu^2},\quad \frac{d^2u}{dv^2} + u - \frac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,\quad \frac{d^2s}{dv^2} + s = 0.$$

$h = \sqrt{a(1-e^2)} = \sqrt{a}$, et l'équation précédente devient

$$(c)\qquad \frac{d^2s}{dv^2} + s + \frac{3}{2}m'\frac{a^3}{a'^3}s_1 + \ldots = 0.$$

Nous avons (Chap. I) $n'^2 = \dfrac{m'}{a'^3}$ et $\dfrac{1}{a'^2} = 1$, en supposant, comme il est permis de le faire, que le mouvement moyen n de la Lune représente le temps; par suite,

$$(d)\qquad \frac{d^2s}{dv^2} + s + \tfrac{3}{2}n'^2 s_1 + \ldots = 0.$$

Si l'on remarque que l'on peut prendre $it = iv$, cette équation donne, en ayant égard à la valeur (b),

$$\frac{d^2s_1}{dv^2} + (1+\tfrac{3}{2}n'^2)s_1 + \Sigma N[1-(i+1)^2]\sin(v+iv+l) = 0$$

et enfin, pour la partie de s_1 qui dépend du mouvement séculaire,

$$(e)\qquad s_1 = \frac{\Sigma N(2i+i^2)\sin(v+iv+l)}{\frac{3}{2}n'^2 - 2i - i^2}.$$

Cette quantité est insensible, car iv s'élève au plus à $50''$ par année, et $\frac{3}{4}n'^2 v$, qui est à peu près le mouvement rétrograde du nœud lunaire, dépasse 20°; d'où il suit que $\frac{3}{2}n'^2$ est au moins quatre mille fois plus grand que $2i$ et que, par suite, la partie séculaire (d) de s_1 ou le troisième terme de l'équation (d) est insensible.

Il résulte de la première que h représente le double de l'aire décrite dans l'unité de temps par la projection du rayon vecteur sur le plan xOy.

On déduit de la troisième

$$s = \gamma \sin(v - \alpha), \tag{5}$$

γ et α étant deux constantes qui (n° 16) représentent respectivement la tangente de l'inclinaison de l'orbite elliptique et la longitude du nœud ascendant.

En substituant la valeur (5) dans la seconde des équations (4) et effectuant l'intégration (Introduction, n° 23), on trouve

$$u = \frac{1}{h^2(1+\gamma^2)}\left[\sqrt{1+s^2} + e\cos(v - \varpi)\right], \tag{6}$$

expression dans laquelle e et ϖ sont deux constantes, qui représentent respectivement l'excentricité et la différence entre les longitudes du périhélie et de l'époque; le demi-grand axe de l'ellipse a pour valeur

$$a = \frac{h^2}{1-e^2}(1+\gamma^2). \tag{7}$$

En négligeant la quatrième puissance de γ, qui est la tangente de $5°8'47'',9$, l'équation (6) devient

$$u = \frac{1}{h^2(1+\gamma^2)}\left[1 + \tfrac{1}{4}\gamma^2 + e\cos(v - \varpi) - \tfrac{1}{4}\gamma^2\cos 2(v - \alpha)\right]. \tag{8}$$

Les valeurs (5) et (6) supposent que l'ellipse lunaire est immobile; mais nous reconnaîtrons plus loin que, par suite de l'attraction du Soleil, les nœuds et le périgée de l'ellipse sont en mouvement (1). Si donc on désigne par $(1-c)v$ le mouvement direct du périgée et par $(g-1)v$ le mouvement rétrograde des nœuds, nous devrons remplacer, dans les équations (5) et (8), α par $\alpha - (g-1)v$ et ϖ par $\varpi + (1-c)v$, et

(1) Les durées respectives des révolutions de ces deux éléments sont dix-huit ans et neuf ans.

nous aurons ainsi

$$(5') \qquad s = \gamma \sin(g\varphi - \alpha),$$

$$(8') \qquad u = \frac{1}{h^2(1+\gamma^2)}\left[1 + \tfrac{1}{4}\gamma^2 + e^2\cos(c\varphi - \varpi) - \tfrac{1}{4}\gamma^2\cos 2(g\varphi - \alpha)\right].$$

Si l'on substitue cette dernière valeur de u dans la première des équations (4), on trouve, en négligeant e^4 et γ^4,

$$\begin{aligned} dt = h^2 d\varphi \Big\{ & 1 + \tfrac{3}{2}(e^2+\gamma^2) - 2e\left(1 + \tfrac{3}{2}e^2 + \tfrac{5}{4}\gamma^2\right)\cos(c\varphi - \varpi) \\ & + \tfrac{3}{2}e^2\cos 2(c\varphi - \varpi) - e^3\cos 3(c\varphi - \varpi) + \tfrac{1}{2}\gamma^2\cos 2(g\varphi - \alpha) \\ & - \tfrac{3}{4}e\gamma^2\left[\cos(2g\varphi + c\varphi - 2\alpha - \varpi) + \cos(2g\varphi - c\varphi - 2\alpha + \varpi)\right]\Big\}; \end{aligned}$$

d'où

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} t = \text{const.} & + h^3\varphi\left(1 + \tfrac{3}{2}e^2 + \tfrac{3}{2}\gamma^2\right) - \frac{2h^3 e}{c}\left(1 + \tfrac{3}{2}e^2 + \tfrac{5}{4}\gamma^2\right)\sin(c\varphi - \varpi) \\ & + \frac{3h^3e^2}{4c}\sin 2(c\varphi - \varpi) - \frac{h^3e^3}{3c}\sin 3(c\varphi - \varpi) \\ & + \frac{h^3\gamma^2}{4g}\sin 2(g\varphi - \alpha) - \frac{3h^3e\gamma^2}{4(2g+c)}\sin(2g\varphi + c\varphi - 2\alpha - \varpi) \\ & - \frac{3h^3e\gamma^2}{4(2g-c)}\sin(2g\varphi - c\varphi - 2\alpha + \varpi). \end{aligned} \right.$$

De la formule (7) on déduit

$$(10) \qquad h^2 = a(1 - e^2 - \gamma^2 + \beta'),$$

β' étant une quantité du quatrième ordre en e et γ.

Portons cette valeur dans la formule (9) en négligeant e^3, $e^2\gamma$, β', tout en conservant le dernier terme qui nous sera utile, en remarquant que nous pouvons supposer $c = 1$, $g = 1$ dans les coefficients des sinus; multiplions ensuite cette formule par la vitesse angulaire moyenne $n = a^{-\frac{3}{2}}$ et désignons par ε une constante; nous obtiendrons

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} nt + \varepsilon = {} & \varphi - 2e\sin(c\varphi - \varpi) + \tfrac{3}{4}e^2\sin 2(c\varphi - \varpi) \\ & + \tfrac{1}{4}\gamma^2\sin 2(g\varphi - \alpha) - \tfrac{3}{4}e\gamma^2\sin(2g\varphi - c\varphi - 2\alpha + \varpi). \end{aligned} \right.$$

La formule (8') devient, eu égard à la valeur (10),

$$(12) \qquad u = \frac{1}{a}\left[1 + e^2 + \tfrac{1}{4}\gamma^2 + e(1+e^2)\cos(c\varphi - \varpi) - \tfrac{1}{4}\gamma^2\cos 2(g\varphi - \alpha)\right].$$

Nous aurons de même, pour le Soleil, en se souvenant que $\gamma' = 0$,

$$(11') \qquad n't + \varepsilon' = v' - 2e\sin(c'v' - \varpi') + \tfrac{3}{4}e'^2\sin 2(c'v' - \varpi'),$$

$$(12') \qquad u' = \frac{1}{a'}[1 + e'^2 + e'(1 + e'^2)\cos(c'v' - \varpi')].$$

L'origine du temps étant arbitraire, nous pouvons supposer $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$, et les équations (11) et (11') donnent, par l'élimination de t,

$$(a) \quad \begin{cases} v' - 2e'\sin(c'v' - \varpi') + \tfrac{3}{4}e'^2\sin 2(c'v' - \varpi') \\ \quad = mv - 2me\sin(cv - \varpi) + \tfrac{3}{4}me^2\sin 2(cv - \varpi) \\ \quad\quad + \tfrac{1}{4}m\gamma^2\sin 2(gv - \alpha) - \tfrac{3}{4}e\gamma^2\sin(2gv - cv - 2\alpha + \varpi), \end{cases}$$

en posant

$$(b) \qquad m = \frac{n'}{n} = \frac{27^j 7^h 43^m 4^s,7}{364^j,256374} = \frac{27^j,321538}{365^j,256374} = \frac{1}{13,002861}$$

En appliquant la formule de Lagrange (1), on déduit de l'équation (a), en observant que c' est peu différent de l'unité,

$$(13) \quad \begin{cases} v' = mv - 2me\sin(cv - \varpi) + \tfrac{3}{4}me^2\sin 2(cv - \varpi) \\ \quad + \tfrac{1}{4}m\gamma^2\sin 2(gv - \alpha) - \tfrac{3}{4}me\gamma^2\sin(2gv - cv - 2\alpha + \varpi) \\ \quad + 2e'(1 - \tfrac{1}{8}e'^2)\sin(c'mv - \varpi') - 2mee'\sin(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\ \quad - 2mee'\sin(cv - c'mv - \varpi + \varpi') + \tfrac{5}{4}e'^2\sin 2(c'mv - \varpi') \end{cases}$$

et la formule (12') devient

$$(14) \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{a'}[1 + e'(1 - \tfrac{1}{2}e'^2)\cos(c'mv - \varpi') + e'^2\cos 2(c'mv - \varpi') \\ \quad + mee'\cos(cv - c'mv - \varpi + \varpi') - mee'\cos(cv + c'mv - \varpi - \varpi')]. \end{cases}$$

186. Avant de substituer les expressions de u, u', s, v' en fonction de v dans Q et ses dérivées, il est utile de bien définir l'ordre de grandeur des différents coefficients qui entrent dans ces expressions.

1° *Quantités du premier ordre :*

$$m = 0,07690622, \quad e = 0,05490807, \quad e' = 0,0167701,$$
$$\gamma = \tang 5°8'47'' = 0,09007450;$$

(1) Introduction, n° 16.

2° *Quantités du second ordre :*

$$\frac{a}{a'} = 0{,}002589, \quad m'm\frac{u'^3}{u^3} \text{ ou } m'm\frac{a^3}{a'^3} = 1{,}033 \times 324439 \times \frac{1}{13}\frac{1}{386^3} = 0{,}0044722.$$

Laplace a porté les approximations jusqu'aux inégalités du troisième ordre inclusivement, en ayant égard aux quantités du quatrième ordre.

Nous dépasserions notre but en reproduisant les calculs auxquels s'est livré l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* et pour lesquels nous renverrons au Livre VII de ses OEuvres. Nous nous bornerons à reproduire d'une manière générale les résultats auxquels il est arrivé en ayant égard au degré d'approximation ci-dessus défini.

Il résulte de la formule (12) et du degré d'approximation admis que, dans le mouvement elliptique, la partie de u indépendante de v est de la forme

$$\frac{1}{a}(1 + e^2 + \tfrac{1}{4}\gamma^2 + \beta), \tag{15}$$

β étant une quantité du quatrième ordre en e et γ; mais l'action du Soleil altère cette valeur : nous représenterons alors la constante absolue que renferme u par

$$\frac{1}{a_1}(1 + e^2 + \tfrac{1}{4}\gamma^2 + \beta''), \tag{15'}$$

a_1 étant une arbitraire qui, sans l'action du Soleil, serait égale à a; nous aurons alors, au lieu de la formule (10), la suivante :

$$h^2 = a_1(1 - e^2 - \gamma^2 + \beta'). \tag{10'}$$

On devra avoir égard à cette valeur dans les termes des équations (1) qui dépendent de l'action du Soleil.

Nous poserons ensuite

$$\overline{m}^2 \frac{m'a^3}{a'^3} = n'^2 a^3. \tag{16}$$

Nous représenterons d'une manière générale par $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$, ... des coefficients de l'ordre ι, en désignant par i l'ordre de grandeur de ces coefficients et par j, à partir de zéro, leur rang dans les développements en séries.

Les formules qui suivent résultent de l'introduction des valeurs (12),

(5′), (12′), (13) dans les expressions (3) et de la substitution de ces expressions dans les équations (1). Pour nous conformer aux notations de Laplace, nous représenterons par θ, au lieu de α, la longitude du nœud lunaire.

187. La seconde des équations (1) prend la forme

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{d^2u}{dt^2}+u\right)\\
&=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}e\cos(cv-\varpi)+\mathfrak{C}\cos 2(1-m)v\\
&\quad+\mathfrak{D}e\cos[(2-2m-c)v+\varpi]+\mathfrak{E}e\cos[(2-2m+c)v-\varpi]\\
&\quad+\mathfrak{D}'e'\cos[(2-2m+c'm)v+\varpi']+\mathfrak{E}'e'\cos[(2-2m+c'm)v-\varpi']\\
&\quad+\mathfrak{F}e'\cos(c'mv-\varpi')+\mathfrak{G}ee'\cos[(2-2m-c+c'm)v+\varpi-\varpi']\\
&\quad+\mathfrak{G}_1ee'\cos[(2-2m-c-c'm)v+\varpi+\varpi']\\
&\quad+\mathfrak{H}ee'\cos[(c+c'm)v-\varpi-\varpi']+\mathfrak{H}_1ee'\cos[(c-c'm)v-\varpi+\varpi']\\
&\quad+\mathfrak{I}e^2\cos 2[(c-1+m)v-\varpi]\\
&\quad+\mathfrak{K}\gamma^2\cos 2(gv-\theta)+\mathfrak{K}_1\gamma^2\cos 2[(g-1+m)v-\theta]\\
&\quad+\mathfrak{L}e'^2\cos 2(e'mv-\varpi')+\mathfrak{M}e\gamma^2\cos[(2g-c)v-2\theta+\varpi]\\
&\quad+\mathfrak{M}_1e\gamma^2\cos[(2-2m-2g+c)+2\theta-\varpi]\\
&\quad+\mathfrak{N}\frac{a}{a'}\cos(1-m)v+\mathfrak{P}\frac{a}{a'}e'\cos[(1-m+c'm)v-\varpi']\\
&\quad+\mathfrak{P}_1\frac{a}{a'}e'\cos[(1-m-c'm)v+\varpi'],
\end{aligned}
\tag{17}
$$

équation que l'on intégrera pour chacun de ses termes en $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ...

En considérant d'abord le premier terme du second membre de cette équation, on a

$$
\begin{aligned}
u=-\mathfrak{A}&=\frac{1}{a_1}(1+e^2+\tfrac{1}{4}\gamma^2+\beta'')-\frac{\overline{m}^2}{2a_1}(1+e^2+\tfrac{1}{4}\gamma^2+\tfrac{3}{2}e'^2),\\
&\quad+\frac{3\overline{m}^2}{4a_1}(4-3m-m^2)\mathrm{A}_2^0(1-\tfrac{5}{2}e'^2)-\frac{3}{4a_1}(\mathrm{B}_1^0)^2\gamma^2;
\end{aligned}
$$

mais, en attribuant à u la forme (15), il vient, en remarquant que, sans l'action du Soleil, on aurait $a_1=a$, $\beta''=\beta$,

$$
\frac{1}{a}=\frac{1}{a_1}-\frac{\overline{m}^2}{2a_1}(1+\tfrac{3}{2}e'^2)+\frac{3\overline{m}^2}{4a_1}(4-3m-m^2)\mathrm{A}_2^0(1-\tfrac{5}{2}e'^2)-\frac{3}{4a_1}(\mathrm{B}_1^0)^2\gamma^2.
$$

L'action des planètes (Chap. II) ne modifie pas a', mais fait varier e';

d'où il suit que $\frac{1}{a}$, aux termes du cinquième ordre près, n'éprouve des variations qu'en raison du terme $-\frac{3\overline{m}^2 e'^2}{4a_1}$; comme la constante de la parallaxe de la Lune est proportionnelle à $\frac{1}{a}$, on voit qu'elle éprouvera une variation séculaire, mais qui est insensible.

188. Passons maintenant au second terme de l'équation (17), et posons

$$\mathfrak{W} = -\frac{a}{1+e^2}(p+qe'^2).$$

La formule (12) nous donne

$$u = \frac{e}{a}(1+e^2)\cos(c\varphi - \varpi).$$

Portons cette valeur dans l'équation (17) réduite à son second terme en considérant e et ϖ comme variables, et négligeons $\frac{d^2\frac{e}{a}}{d\varphi^2}$ en raison de la lenteur des variations séculaires de l'orbe terrestre; en comparant les sinus et cosinus de $(c\varphi - \varpi)$, nous trouvons

$$2\left(c-\frac{d\varpi}{d\varphi}\right)\frac{d}{d\varphi}\frac{e(1+e^2)}{a} - \frac{e(1+e^2)}{a}\frac{d^2\varpi}{d\varphi^2} = 0,$$

$$\left(c-\frac{d\varpi}{d\varphi}\right)^2 + p + qe'^2 - 1 = 0.$$

De la première de ces équations, on tire, en désignant par k une constante arbitraire,

$$\frac{ke^2(1+e^2)^2}{a^2} = \frac{1}{c-\frac{d\varpi}{d\varphi}}.$$

La seconde donne, en négligeant le carré de qe'^2,

$$\frac{d\varpi}{d\varphi} = c - \sqrt{1-p} + \frac{1}{2}\frac{qe'^2}{\sqrt{1-p}}.$$

Comme on peut considérer ici, sans erreur sensible, p et q comme

constants, il vient, en désignant par ε une constante arbitraire,

$$\varpi = cv - v\sqrt{1-p} + \frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{1-p}}\int e'^2\,dv + \varepsilon$$

ou

$$\varpi + (1-c)v - \varepsilon = v(1-\sqrt{1-p}) + \frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{1-p}}\int e'^2\,dv.$$

Il suit de là que, conformément aux observations, le périhélie a un mouvement représenté par

$$v(1-\sqrt{1-p}) + \frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{1-p}}\int e'^2\,dv$$

et qui n'est pas uniforme en raison de la variabilité de e'.

Comme la position de l'axe Ox est indéterminée, nous pourrons supposer qu'à une époque déterminée nous ayons $v = 0$, et nous représenterons par e'_0 la valeur correspondante de e'. Si le temps t ne dépasse pas une certaine limite, nous pourrons poser, en désignant par f, f' deux constantes,

$$e' = e'_0 + fv + f'v^2,$$

et nous aurons pour le mouvement ci-dessus

$$\left(1-\sqrt{1-p} + \frac{1}{2}\frac{qe'_0}{\sqrt{1-p}}\right)v + \frac{1}{2}\frac{qe'_0}{\sqrt{1-p}}fv^2 + \frac{1}{6}\frac{q}{\sqrt{1-p}}(2e'_0f' + f^2)v^3,$$

formule qui peut servir pendant deux mille ans avant et après l'origine du temps. La partie

$$\frac{1}{2}\frac{qe'_0}{\sqrt{1-p}}fv^2 + \frac{1}{6}\frac{q}{\sqrt{1-p}}(2e'_0f' + f^2)v^3$$

est l'inégalité séculaire du mouvement du périhélie, qui maintenant se ralentit de siècle en siècle. On peut prendre

$$c = \sqrt{1-p} - \frac{1}{2}\frac{qe'_0}{\sqrt{1-p}};$$

l'angle ϖ est alors égal à ε augmenté de l'inégalité séculaire du périhélie.

L'excentricité e de l'orbite lunaire éprouve une variation séculaire analogue à celle de la parallaxe, mais elle est insensible comme cette

dernière; ces deux variations sont proportionnelles à la dérivée $\frac{d\varpi}{dv}$, qui ne devient sensible que dans l'intégrale $\int \frac{d\varpi}{dv} dv$.

Si l'on représente par $\frac{H}{a_1}\cos(iv+\beta)$ un terme quelconque de l'équation (17) et si l'on désigne par

$$P\cos(iv+\beta)+Q\sin(iv+\beta)$$

la partie correspondante de u, on aura, pour déterminer P et Q, les deux équations

$$\left[1-\left(i+\frac{d\beta}{dv}\right)^2\right]P+\frac{H}{a_1}=0,$$

$$Q=\frac{2\left(i+\frac{d\beta}{dv}\right)\frac{dP}{dv}+P\frac{d^2\beta}{dv^2}}{1-\left(i+\frac{d\beta}{dv}\right)^2}.$$

Les variations de P et de β étant extrêmement lentes et i étant très grand par rapport à $\frac{d\beta}{dv}$, la valeur de Q est insensible et l'on a

$$P=\frac{H}{a_1\left[\left(i+\frac{d\beta}{dv}\right)^2-1\right]}.$$

189. La troisième des équations (1) prend la forme suivante :

$$(18)\quad \begin{cases} -\left(\frac{d^2s}{dt^2}+s\right) \\ =\mathfrak{A}_0\gamma\sin(gv-\theta)+\mathfrak{B}_0\gamma\sin[(2-2m-g)v+\theta]+\mathfrak{B}_1\gamma\sin[(2-2m+g)v-\theta] \\ +\mathfrak{C}e\gamma\sin[(g+c)v-\theta-\varpi]+\mathfrak{C}_1e\gamma\sin[(g-c)v-\theta+\varpi] \\ +\mathfrak{D}e\gamma\sin[(2-2m-g+c)v+\theta-\varpi] \\ +\mathfrak{D}_1e\gamma\sin[(2-2m+g-c)v-\theta+\varpi]+\mathfrak{D}_2e\gamma\sin[(2-2m-g-c)v+\theta+\varpi] \\ +\mathfrak{E}e'\gamma\sin[(g+c'm)v-\theta-\varpi]+\mathfrak{E}_1e'\gamma\sin[(g-c'm)v-\theta+\varpi'] \\ +\mathfrak{F}e'\gamma\sin[(2-2m-g+c'm)v+\theta-\varpi']+\mathfrak{F}_1e'\gamma\sin[(2-2m-g-c'm)v+\theta+\varpi'] \\ +\mathfrak{G}e^2\gamma\sin[(2c-g)v-2\theta+\varpi]+\mathfrak{G}e^2\gamma\sin[(2-2m-2c+g)v+2\varpi-\theta] \\ +\mathfrak{H}e^2\gamma\sin[(2c+2m-2+g)v-2\theta-\varpi] \\ +\mathfrak{K}\frac{a}{a'}\gamma\sin[(g-1+m)v-\theta]+\mathfrak{K}_1\frac{a}{a'}\gamma\sin[(g+1-m)v-\theta]. \end{cases}$$

Considérons le premier terme du second membre de cette équation;

le coefficient $\mathfrak{A}$ est de la forme

$$\mathfrak{A} = p'' + q'' e'^2.$$

En substituant l'expression (5′) de s, ou

$$s = \gamma \sin(g\varphi - \theta),$$

dans laquelle on doit considérer γ et θ comme des fonctions de φ, en raison de la variation de l'excentricité de l'orbe terrestre, on obtient, par la comparaison des sinus et cosinus de $(g\gamma - \theta)$,

$$\gamma \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} - 2\left(g - \frac{d\theta}{d\varphi}\right)\frac{d\gamma}{d\varphi} = 0,$$

$$\frac{d^2\gamma}{d\varphi^2} - \gamma\left[\left(g - \frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 1\right] + (p'' + q'' e'^2)\gamma = 0.$$

La première de ces équations donne, en désignant par H une constante arbitraire,

$$\frac{1}{g - \dfrac{d\theta}{d\varphi}} = H\gamma^2, \tag{19}$$

et la seconde, en négligeant $\frac{d^2\gamma}{d\varphi^2}$ et le carré de $q'' e'^2$,

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = g - \sqrt{1 + p''} - \frac{1}{2}\frac{q'' e'^2}{\sqrt{1 + p''}};$$

d'où, en regardant p'' et q'' comme constants, ce que l'on peut supposer ici sans erreur sensible, et désignant par λ une constante arbitraire,

$$0 = g\varphi - \sqrt{1 + p''}\,\varphi - \frac{1}{2}\frac{q''}{\sqrt{1 + p''}}\int e'^2\, d\varphi + \lambda$$

et

$$0 - (g - 1)\varphi - \lambda = (1 - \sqrt{1 + p''})\varphi - \frac{1}{2}\frac{q''}{\sqrt{1 + p''}}\int e'^2\, d\varphi.$$

Il suit de là que les nœuds de l'orbite lunaire ont un mouvement rétrograde représenté par

$$(\sqrt{1 + p''} - 1)\varphi + \frac{1}{2}\frac{q''}{\sqrt{1 + p''}}\int e'^2\, d\varphi.$$

Ce mouvement n'est pas uniforme en raison de ce que e' est variable, et l'on voit que le rapport des inégalités séculaires du nœud et du périhélie est celui de $\frac{q''}{\sqrt{1+p''}}$ à $-\frac{q}{\sqrt{1+p}}$.

En vertu de la formule (19), la tangente γ de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie est variable, mais sa variation est insensible, ce qui est conforme aux résultats des observations les plus anciennes.

Quant aux parties de s qui correspondent aux différents termes du second membre de l'équation (18), on les déterminera en suivant la marche que nous avons indiquée pour u.

190. Considérons, dans la première des équations (1), le terme de son second membre qui est indépendant de v et posons

$$dt = \frac{a^2}{\sqrt{a_1}}\mathfrak{A}\,dv, \tag{20}$$

expression dans laquelle $\mathfrak{A}$ est indépendant de e'.

D'après le n° **188**, nous avons, en n'ayant égard qu'à l'inégalité séculaire de a,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} - \frac{3\overline{m}^2 e'^2}{4a_1},$$

d'où

$$a^2 = a_1^2\left(1 + \tfrac{3}{2}\overline{m}^2 e'^2\right)$$

et

$$dv = \frac{1}{\mathfrak{A}}\,a_1^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \tfrac{3}{2}\overline{m}^2 e'^2\right)dt.$$

Mais on a très sensiblement

$$\mathfrak{A} = 1, \quad \overline{m}^2 = m'\frac{a_1^3}{a'^3} = \frac{n'^2}{n^2} = m^2$$

et, de plus,

$$a_1^{-\frac{3}{2}} = n,$$

par suite,

$$v = \int n\,dt - \tfrac{3}{2}m^2\int e'^2 n\,dt.$$

Il suit de là et de ce qui précède que les trois inégalités séculaires

des longitudes moyennes de la Lune, du périhélie et des nœuds sont entre elles comme $3m^2$, $-\frac{q}{\sqrt{1-p}}$, $\frac{q''}{\sqrt{1+p''}}$.

Nous ne croyons pas devoir nous arrêter au développement de $nt+\varepsilon$ en série trigonométrique, pour lequel nous renverrons aux nos 15 et suivants du Livre VII des *Œuvres de Laplace* (1).

190. Des inégalités dues à la non-sphéricité de la Terre. — Nous admettrons que la surface de la Terre a une forme quelconque, pourvu qu'elle soit peu différente de la sphère, en négligeant seulement la quatrième puissance du rapport du rayon moyen de cette surface à la distance moyenne de la Lune au centre de la Terre. La formule (8) du n° 104 devient

$$V=\frac{1}{r}+\frac{A^2Z_2}{r^3}+\frac{A^3Z_3}{r^4}+\frac{A^2\varphi}{2r^3}\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right).$$

Il est inutile d'introduire dans les expressions de Z_2, Z_3 les termes dépendants de la longitude terrestre ϖ, attendu que ces termes ne donneraient que des inégalités lunaires d'un jour ou d'une fraction de jour.

Il suit de là (nos 84 et 85) que Z_2 sera proportionnel à $\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)$ et que Z_3 sera de la forme

$$\frac{5}{2}k'\left(\mu^3-\frac{3}{5}\mu\right).$$

Nous pouvons donc poser

$$V=\frac{1}{r}+\frac{kA^2}{r^3}\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right)+\frac{5}{2}k'\frac{A^3}{r^4}\left(\cos^3\theta-\frac{3}{5}\cos\theta\right).$$

Il résulte de là deux inégalités à longues périodes, l'une dépendant de

$$\frac{kA^2}{r^3}\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right)$$

ou de l'aplatissement de la Terre, l'autre de

$$\frac{5}{2}k'\frac{A^3}{r^4}\left(\cos^3\theta-\frac{3}{5}\cos\theta\right)$$

ou de la différence des deux hémisphères terrestres.

---

(1) *Voir,* pour la définition et la dénomination des principales inégalités de la Lune, le *Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique,* par M. Faye, t. II, p. 310 et suiv.

Les équations (7) du n° 183 pourront alors recevoir ici, sans inconvénient, leur application en représentant par M la masse de la Terre, par m celle de la Lune et posant $M + m = 1$, attendu (n^{os} 3 et 8) que $\frac{m}{M}$ n'est pas négligeable devant l'unité.

Nous ne croyons pas devoir entrer dans plus de détails sur ce sujet ni même effleurer la question des inégalités produites dans le mouvement lunaire par les attractions des planètes.

FIN.

9208 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

SECOND ERRATUM[1].

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
3	3	(2)	(4)
4	5	du_2	δu_2
15	9	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{dp}{du}$
17	7 en remontant	(n° 5)	(n° 6)
18	4 et 5	$\frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_2}\,d\beta_1$	$\frac{d\mathrm{H}_2}{d\beta_1}\,d\beta_1$
25	11 en remontant	$m^2\,d\,\frac{dx^2}{dt}$	$m^2\,d\,\frac{dx^2}{dt^2}$
28	3	$-r\,\frac{d\theta^2}{dt}$	$-r\,\frac{d\theta^2}{dt^2}$
40	1 en remontant	$\frac{1}{qx}\cos x$	$\frac{1}{qx}\cos qx$
59	12 en remontant	$\chi = \operatorname{tang}\varphi$	$\chi = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$
61	3	$\frac{1}{4}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^2$
	6	$(\operatorname{tang}\varphi' + \operatorname{tang}\varphi)\,\gamma_1$	$\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\gamma_1$
	8	$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$	$\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}$
	10	$\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)$	$\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^2$
65	1 en remontant	n° 12	n° 16
67	4	$\cos^3 nt$	$\cos 3nt$
	11	$\frac{e}{1+\sqrt{1-e}}$	$\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}$
68	2	$-\sin t$	$-\sin nt$
70	1 en remontant	$-\frac{5}{2^5}s^6$	$-\frac{5}{2^4}s^6$
71	8 »	$rr'\cos(\varphi, \varphi')$	$rr'\cos(\varphi - \varphi')$
	7 »	$a^2(1-\cos u)^2 + a^2(1-\cos u')^2$	$a^2(1-e\cos u)^2 + a^2(1-e\cos u')^2$
	3 »	$(2 - 2\cos^2\beta)$	$1 - \cos 2\beta$
72	8	$\operatorname{tang}^2\beta$	$4\operatorname{tang}^2\beta$
75	1 en remontant	$\frac{2\sin(\varphi-\varphi')}{2}$	$2rr'r''\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}$

[1] Le premier se trouve à la fin de la Table des matières, p. xx.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
77	5 en remontant	$r^2 =$	$r'^2 =$
	3 »	$(r' - r)^2$	$(r' - r'')^2$
78	7 »	deux termes de cette valeur	deux derniers termes de...
	3 »	$r =$	$r' =$
85	12 »	des seconds	des premiers
86	2	$\frac{s_0}{4 r_0^3}$	$\frac{s_0}{4 r_0^5}$
88	11	$= a +$	$r = a +$
89	1	(16)	(15)
94	10	$a^3 - ap$	$a^2 - ap$
	7 en remontant	$\frac{\overline{MP}^2}{F m}$	$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{M m}}$
95	3 »	$a^{-\frac{5}{2}}$	$a^{-\frac{3}{2}}$
	2 »	$= -\frac{2}{3}$	$= -\frac{3}{2}$
96	11	$\frac{4\psi'}{\varphi'}$	$\frac{4\psi'}{\varphi}$
97	8	de F_1	de F'_1
104	2	$\sqrt{1 - \cot^2\varphi \tang^2\varphi}$	$\sqrt{1 - \cot^2\varphi \tang^2\lambda}$
105	2	$\frac{dp_1}{\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{q_2^2}{r^2}\right)}$	$\frac{dp_1}{\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{q_2^2}{r^2} - p_1^2\right)}$
108	4	$n = a^{\frac{3}{2}}$	$n = a^{-\frac{3}{2}}$
109	9 en remontant	$\frac{d\omega}{dk} = 1$	$\frac{d\omega}{dk} = 0$
	7 »	$\frac{d\varepsilon}{d\varphi_1} = 0$	$\frac{d\varepsilon}{d\varphi_1} = 1$
110	8 »	$(\varphi, \alpha) = -$	$(\varphi, \alpha) =$
	3 »	$d\varphi = -$	$d\varphi =$
119	12	$n'(1 + \sigma')$	$a'(1 + \sigma')$
	9 en remontant	$B_i \cos\theta$	$B_i \cos i\theta$
	4 »	$\frac{(1+\sigma)}{(1+\sigma')^4} \cos(\theta...)$	$\frac{(1+\sigma)}{(1+\sigma')^4} z'^2 \cos(\theta...)$
120	2 »	$\frac{\chi' - \chi}{4}$	$\frac{(\chi' - \chi)^2}{4}$
123	12	n° 24	n° 35
	8 en remontant	$-\frac{1}{2}[...]$	$-\frac{1}{4}[...]$
125	2	$\frac{1}{2} a^2 \frac{d^2 A_0}{da'^2}$	$\frac{1}{2} a'^2 \frac{dA_0}{da'^2}$
	3	$-\frac{1}{8}\frac{dA_0}{da}$	$-\frac{1}{4}\frac{dA_0}{da}$
		$\frac{d^2 A_0}{da\, da'}$	$\frac{d^2 A_1}{da\, da'}$
	6	$a' \frac{dA_1}{da}$	$a' \frac{dA_1}{da'}$
	8	$\frac{1}{2} a^2 \frac{d^2 A_0}{da'^2}$	$\frac{1}{2} a'^2 \frac{d^2 A_0}{da'^2}$
	9	$\frac{d^2 A_0}{da\, da'}$	$\frac{d^2 A_1}{da\, da'}$

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
125	10	deux fois $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
127	2	$\frac{A_0}{(a'^2-a^2)^2}$	$\frac{A_0}{a'^2-a^2}$
	4 et 7	$\frac{d^2A_0}{da\,da'}$	$\frac{d^2A_1}{da\,da'}$
	7 en remontant	deux fois $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
128	2	$8(a'^2-a^2)$	$4(a'^2-a^2)^2$
		$2(e^2+e'^2)^2$	$e^2+e'^2$
	5	n° 16	n° 36
	6	$8(a'^2-a^2)$	$4(a'^2-a^2)^2$
		$2(b^2+c^2+\ldots)$	$b^2+c^2+\ldots$
	11 et 9 en remontant	$\frac{(p-p')^2}{2}$, $\frac{(q-q')^2}{2}$	$(p-p')^2$, $(q-q')^2$
132	3	$\frac{d\Phi}{dc}$	$\frac{d\Phi}{de}$
133	7	I	R_0
	9	$H(\ldots)+G(\ldots)$	$G(\ldots)+H(\ldots)$
139	12	$m''b''$	$m''c''$
146	2 en remontant	$\left(\frac{p-p'}{2}\right)^2$, $\left(\frac{q-q'}{2}\right)^2$	$(p-p')^2$, $(q-q')^2$
148	6 »	$+[\ldots]$	$-[\ldots]$
	5 »	$\left(\frac{p-p'}{2}\right)^2$, $\left(\frac{q-q'}{2}\right)^2$	$(p-p')^2$, $(q-q')^2$
	3 »	$+[\ldots]$	$-[\ldots]$
	2 »	$\left(\frac{p-p''}{2}\right)^2$, $\left(\frac{q-q''}{2}\right)^2$	$(p-p'')^2$, $(q-q'')^2$
153	1	(2)	(2′)
154	7	dC^1	dC'
	13	de u''	de u'
	12 en remontant	a^2	a
	5 »	$(1-e\cos u)\,du$	$(1-e\cos u)\,da$
157	13 »	deux fois $\cos^2\delta$	$\sin^2\delta$
166	8 »	$\frac{(1-e\cos u)^2}{\sqrt{1-e^2}}\delta$	$\frac{(1-e\cos u)^2}{\sqrt{1-e^2}}\delta\omega$
	7 »	(B_1)	(B_2)
167	3	$\frac{3}{r^4}$	$\frac{3}{2r^4}$
	4	$\frac{5}{r^6}[\ldots]^2$	$\frac{5}{2r^6}[\ldots]^3$
	6	$-\frac{1}{r'^2}$	$-\frac{1}{r'^3}$
	7	$\frac{3}{r^5}$	$\frac{3}{2r^5}$
	8	$\frac{5}{r^7}$	$\frac{5}{2r^7}$
	10 en remontant	$\frac{3}{r^5}$	$\frac{3}{2r^5}$
	9 »	$\frac{5}{r^7}$	$\frac{5}{2r^7}$

ERRATUM.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
167	3 en remontant	$\frac{15}{r^7}, \frac{35}{r^9}$	$\frac{15}{2r^7}, \frac{35}{2r^9}$
	2 »	$\frac{6}{r^5}, \frac{15}{r^7}$	$\frac{6}{2r^5}, \frac{15}{2r^7}$
168	1	(A)	(A_1)
177	3 en remontant	yz	yx
181	5 »	a'^2	a'^3
182	3 »	n° 57	n° 54
	1 »	même numéro	n° 57
183	11 »	$\int_{a-\iota}^{a+a}$	$\int_{a-a'}^{a+a'}$
184	1 »	$\frac{Ar}{3} =$	$\frac{Ar}{3} +$
191	3 »	$\log \frac{\sqrt{1-\frac{2e}{R}}+u}{\sqrt{1-\frac{2e}{R}}+u}$	$\log \frac{\sqrt{1-\frac{2e}{R}}+u}{\sqrt{1-\frac{2e}{R}}-u}$
193	7	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\delta, q)$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\delta, q)\, d\delta$
199	3 en remontant	$\sqrt{X^2+Y^2}$	$\sqrt{Z^2+Y^2}$
205	7	$\frac{z}{r}$	$\frac{z}{a}$

Dans la note de ce numéro, ψ a remplacé la lettre ϖ du texte.

206	1 en remontant	coefficient $\frac{1}{a^{\nu+1}}$	coefficient de $\frac{1}{a^{\nu+1}}$
207	1 »	$\left(1-\frac{a'}{a}\right)p$	$\left(1-\frac{a'}{a}p\right)$
210	15 »	$m'q'$	$\overline{mq'}$
	10 »	$2A\int$	$2A\rho\int$
215	7 »	$\frac{dY_{\nu'}}{d\mu}$	$\frac{dY_{\nu'}}{d\mu}\, d\varpi\, d\mu$
	1 »	$[\ldots]$	$[\ldots]\, d\mu$
		$-Y_{\nu'}\frac{dY_{\nu'}}{d\mu}$	$-Y_{\nu}\frac{dY_{\nu'}}{d\mu}$
216	13	$\int_0^{2\pi}\int$	$\int_0^{2\pi} d\varpi\int$
217	2	$d\mu$	$d\mu'$
218	1	à $X_{\nu'}$	à X_{ν}
220	5 en remontant	A^3	A^2
224	3 et 11	r	a
228		$[\ldots]\, d\alpha$	$[\ldots]^{\nu}\, d\alpha$
	3 en remontant	$\frac{1-\mu}{z}$	$\frac{1-\mu^2}{z}$
229	5	$e^{2i\alpha}$	$e^{-3i\alpha}$
	7	$-X^{(1)}+X^{(2)}$	$-X_{\nu}^{(1)}+X_{\nu}^{(2)}$
230	2 en remontant	$\overline{d\mu^m}$	$\overline{d\mu'^m}$

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
231	0 en remontant	Abstraction faite du facteur $\frac{3}{2}$ de X_2 qui rentrerait dans les constantes arbitraires de Y_2.	
233	3 en remontant	$\frac{\nu - m}{\nu + m}$	$\frac{\nu - m'}{\nu + m}$
	1 »	la seconde des formules (13)	la formule (13)
235	14	$\cos 2\varpi$	$\cos\varpi$
236	12	$\cos\varpi\, da^5$	$\cos\varpi\, d\varpi\, d\mu\, da^5$
237	6 en remontant	$d\varpi\, d\varpi\, dA^5$	$d\varpi\, d\mu\, dA^5$
	4 »	$d\varpi\, d\varpi\, d(A^5 z)$	$d\varpi\, d\mu\, d(A^5 z)$
238	3 »	$\int d(A^5\gamma_2)$	$\int \rho\, d(A^5\gamma_2)$
243	1 »	$\left(\frac{4\pi\rho}{M}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{4\pi\rho}{M}\right)^{-\frac{1}{3}}$
244	4	$(1 + u^2)$	supprimé
	10	$\left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{-\frac{1}{3}}$
247	8 en remontant	λ^2	λ^3
249	14	$\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{-\frac{1}{3}}$
250	13	$(Qy - n^2)$	$(Q - n^2)^2$
	15	$(1 + \lambda^2) z^2$	$(1 + \lambda^2)^2 z^2$
	8 en remontant	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dz}$
251	9 »	$\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{-\frac{1}{3}}$
252	5 et 6	R^3	R^5
	6 en remontant	$3st\zeta^2$	$2st\zeta^2$
	2 »	(12)	(13)
256	7	$(3 + st - 4st)$	$(s + t - 4st)$
264	8	$\sum_2^\infty$	$\frac{M'}{a'}\sum_2^\infty$
	9 en remontant	$\left(\frac{a}{a'}\right)$	$\left(\frac{a}{a'}\right)^\nu$
265	11 »	$\left(\frac{A}{a'}\right)^\nu$	$\sum_2^\infty P_\nu\left(\frac{A}{a'}\right)^\nu$
	7 »	$n^2 A^2$	n^2
		$\sum \frac{M'}{a'^3}$	$\sum \frac{M'}{a'^3} P_2$
	5 »	$\sum \frac{M'}{a'^{\nu+1}}$	$\sum \frac{M'}{a'^{\nu+1}} P_\nu$
270	3	$A^{\nu-2}$	$A^{\nu-3}$
275	5	$\frac{\pi}{A^3}$	$\frac{\pi}{A^4}$
	4 en remontant	$+\frac{8\pi}{5}$	$-\frac{8\pi}{5}$
276	10	la for-	de la for-
277	11 »	n° 89	n° 87
285	8 »	$\beta = 0{,}08$	$\beta = 0{,}8$

ERRATUM.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
285	1 en remontant	$\frac{25}{12}$	$\frac{25}{13}$
292	3	$M\frac{\gamma^2}{a^3}$	$\frac{1}{2}M\frac{\gamma^2}{a^3}$
	5	$2M\gamma$	$M\gamma$
	10 en remontant	$-\frac{2M}{a^3}$	$-\frac{M}{a^3}$
	7 »	$3\gamma^2$	$2\gamma^2$
293	2	λ	γ
	7	R^2	R^3
299	6	$d\delta$ / dt	$\frac{d\alpha}{dt}$
	10 en remontant	$\frac{d\alpha^2}{dt}$	$\frac{d\alpha^2}{dt^2}$
301	1 »	$-\frac{\partial u}{\partial \alpha}$	$+\frac{\partial u}{\partial \alpha}$
308	11	(17)	(15)
312	11 en remontant	l'angle	θ, l'angle
316	2	$\cos\theta\, d\theta$	$\cos\theta$
	5 et 1 en remontant	$3\cos 2\psi$	$3\cos^2\psi$
317	2	même correction	
319	10	$\sqrt{2+\dots}$	$\sqrt[3]{2+\dots}$
	6 en remontant	-6ν	$+6\nu$
323	13 »	$y=\pm z\sqrt{3}$	$z=\pm x\sqrt{3}$
325	4 »	$3^{\frac{3}{4}}$	$3^{\frac{4}{3}}$
	2 »	$\sqrt{\dots}$	$\sqrt[3]{\dots}$
327	6	ce cône	le cône
332	10	$(R_0^2-r_0^2)$	$(R_0^3-r_0^3)$
343	15 en remontant	$3\nu+1$	$2\nu+1$
344	1 »	$2ng\mu$	$\frac{2ng\mu}{i}$
345	1 »	$6(1-\frac{3}{5}\rho)$	$6\gamma g(1-\frac{3}{5}\rho)$
346	7	n^2	μ^2
348	11	$(1-q\mu^2)a$	$(1-q\mu^2)a'$
	12	n° 85	n° 85*
353	2	$\frac{2n}{l}$	$\frac{2n}{i}$
	3	$(1=\mu^2)$	$(1-\mu^2)$
	6 en remontant	$\cos\nu$	$\cos^2\nu$
354	3 »	$\frac{1}{2(\nu+2)^2+3(\nu+1)}$	$\frac{1}{2(\nu+2)^2+3(\nu+2)}$
356	10	$\cos\theta$	$\cos 2\theta$
	12	x^2, 7,4581 x^1	x^6, 7,4561 x^{10}
360	7	$\frac{dF}{d\mu}$	$\frac{dF'}{d\mu}$
361	9	$\frac{d\gamma}{d\varpi}=\mu$	$\frac{d\gamma}{d\varpi}=0$
	4 en remontant	$\frac{1-\mu^2}{\mu}$	$\frac{1-\mu^2}{\mu^2}$

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
364	9	ϖ'	ϖ
	12, 10, 8 en remontant		
365	1 en remontant	$\left(\frac{A_0^3}{A'^3}\right) : \frac{M'}{A_0^3}\left(\frac{A_0^3}{A_0'^3}\right)$	$\left(\frac{A_0'^3}{A'^3}\right) : \frac{M}{A_0^3}\left(\frac{A_0^3}{A^3}\right)$
366	1	$\frac{\delta_0}{\delta_0}$	$\frac{\delta_0}{\delta_0'}$
367	13	$\sin^2\alpha$	$\sin 2\alpha$
375	10	$\sin 2(nt + \varpi - \psi)$	$\sin 2(nt + \varpi - \psi')$
	11	(10)	(11)
383	9	$+ \eta_1 \cos 2\varphi$	$- \eta_1 \cos 2\varphi$
384	4	deux fois $\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^5}$
390	1 en remontant	des angles	des angles i
391	3	$\frac{i^2}{2}\cos\theta$	$\frac{i^2}{2}\cot\theta$
392	7	$\ldots k\cot\theta')t$	$\ldots k\cot\theta')t^2$
	8	$\cot^2\theta'$	$\cot\theta'$
393	11 en remontant	a^3	a^2
394	1 »	$A^3\, dA$	$A^2\, dA$
397	12	$\cos^2\theta'$	$\cos^2\frac{\theta'}{2}$
	15	$\tang\frac{\theta'}{2}$	$\tang\frac{\theta'}{2}t^2$
	7 en remontant	$(\ldots)t^2$	$(\ldots)\tang\frac{\theta'}{2}t^2$
398	11	325,25	365,25
399	11	par $O\chi$	par rapport à $O\chi$
403	15 en remontant	puissances θ, i, ε	puissances de θ, i, ε
407	1	de la Lune	de l'orbite de la Lune
	10 en remontant	ou,	et
414	4	Oz_1	Cz_1
416	6	ε^2	ε^5
	7 et 8	ε^3	ε^5
	3 en remontant	$O\gamma_1$	$G\gamma_1$
417	4, 6, 11 en remontant	O	G
418	6	$\cos(\varphi - 2\psi)$	$\sin(\varphi - 2\psi)$
424	5 en remontant	$\delta\nu^2 x\, dx$	$\delta\nu\, x^2\, dx$
425	3	$-\int_0^1$	$-\frac{1}{2}\int_0^1$
	9	n° 106	n° 107
429	8	$= \frac{dr}{r}\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$	$= d\gamma + \frac{dr}{r}\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$
430	11 en remontant	$[\ldots]\, d$	$[\ldots]\, d\varrho$
433	5	$(\ldots)e t_1^3$	$(\ldots)e t_1^2$
434	8	$\frac{f}{f_1}$	$\frac{f}{f'}$
435	6 en remontant	$(0{,}7547916\, t^2)$	$(0{,}7547916 - 0{,}4904167\, t^2)$
437	5	n° 103	n° 104
440	8	Saturne	Mercure
441	10 en remontant	$-2\gamma^2$	$-3\gamma^2$

ERRATUM.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
444	3	$\frac{1}{u^2}\frac{dQ}{d\varphi}$	$\frac{1}{u^2}\frac{dQ}{dv}\frac{du}{dv}$
	6	$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{1}{r}$
	6 en remontant	$r + r'^2$	$r^2 + r'^2$
445	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
	10	$(1 + s^2)^3$	$(1 + s'^2)^3$
	7 en remontant	$\varphi' \cos\alpha$	à supprimer
446	9 et 6 en remontant	$\frac{3 m' u'^3}{u^2}$	$\frac{3 m' u'^3}{z u^2}$
447	2	$+ \frac{s}{u}$	$- \frac{s}{u}$
449	6	$h^2\, d\varphi$	$h^3\, dv$
457	14	n° 188	n° 187

As 87507
R
Resal, M.H.
Traité élémentaire de mécanique déleste.

University of Toronto
Library

DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET

Acme Library Card Pocket
LOWE-MARTIN CO. LIMITED